

# Avaliação de Técnicas para Transmissão Digital em Canal com Desvanecimento Lento e Não Seletivo em Frequência Modelado com a Distribuição $\eta$ - $\mu$

CARLOS PAULA LEMOS

Dissertação apresentada ao Instituto Nacional de Telecomunicações, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: PROF. DR. SANDRO ADRIANO FASOLO

Santa Rita do Sapucaí  
2003

Dissertação defendida e aprovada em 28/02/2003, pela comissão julgadora:

---

Prof. Dr. Sandro Adriano Fasolo (Orientador) - DTE - Inatel

---

Prof. Dr. Marcelo Eduardo Pellenz (membro externo) - Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia - Pontífica Universidade Católica do Paraná

---

Prof. Dr. Carlos Alberto Ynoguti (membro interno) - DTE - Inatel

---

**Coordenador do Curso de Mestrado**

à minha filha Débora e ao  
meu afilhado Matheus.

# Agradecimentos

Certa vez ao ler um texto escrito por meu pai, me atentei ao seguinte trecho:

*“Toda vez que alguém se alegra com sua presença repita esta pergunta: Porque isto acontece comigo?”*

Me fiz esta pergunta ao término deste trabalho por me ver muito feliz com o feito. A resposta que me veio foi a imagem das muitas pessoas que contribuíram para a realização deste projeto. E todas sem exceção!, merecem meu respeito, admiração e gratidão. Mas para você que esta lendo esta dissertação é importante para mim que compartilhe de alguns nomes.

Agradeço aos amigos Agnaldo Rodrigues, Amarildo Martins, André Aguiar, Carlos Macedo, Gonçalo Máximo, Helder Alves, Iwanir Araujo, Laert Calil, Leandro Napoli, Samir Naamissa e Tiago Carneiro que nestes últimos anos mostraram um carinho e uma receptividade muito grande. Aos “consultores” Carlos Ynoguti, Estevan Lopes, Lazara Rodrigues, Luciano Leonel e Rausley Souza pelo “suporte técnico” fornecido e pela paciência que tiveram para comigo. Aos professores Carlos Nazareth e José Geraldo que muito bem me recomendaram. À “Rep. du Craúdio” pela boa energia que vem de seus membros: Alexandre Bixo, Augusto, Craúdio, Dona Maria, Edmilson, Giovani, Jorge, José Luiz, Juliano, Luiz, Saulo Bixo e ... outros.

Agradecimentos especiais ao meu primeiro orientador, Prof. Dr. Adonias Costa da Silveira, pela posição profissional e coerente que sempre teve para comigo. Ao meu presente orientador, Prof. Dr. Sandro Adriano Fasolo, o qual mostrou-se mais uma vez ser um profissional e ser humano diferenciado. À Dra. Maria Beatriz França Coury por seu carinho e preocupação. Às tias Vera, Maria e família pelo apoio e incentivo que sempre recebi. Ao Eng. Rodrigo Bahia Paiva, amigo e profissional que muito considero e admiro.

Aos meus pais Adirão e Jovita, ao meu irmão Marcos, às minhas irmãs Cássia e Kristi e à minha companheira Vera, que me dão tranquilidade para dedicação integral à minha carreira, não só agradeço, bem como vos declaro todo meu amor e admiração. Amo vocês!!

Agradecimento muito especial ao Nosso Senhor Jesus Cristo!!!

# Índice

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Abreviaturas e Siglas</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Canal com Desvanecimento . . . . .	1
1.2 Tratamento Estatístico . . . . .	3
1.3 Diversidade . . . . .	3
1.4 Proposta de Trabalho . . . . .	4
<b>2 Ambiente de Propagação e Análise de Desempenho</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução . . . . .	6
2.2 Ambientes de Propagação . . . . .	7
2.2.1 Fdp do Canal com Desvanecimento em Função de $\gamma_b$ . . . . .	8
2.2.2 Fdp do Canal com Desvanecimento em Função de $\rho$ . . . . .	8
2.2.3 Fdp do Canal com Desvanecimento em Função de $w$ . . . . .	9
2.2.4 Fdp do Canal com Desvanecimento em Função de $\omega$ . . . . .	9
2.2.5 Ambiente Rayleigh . . . . .	10
2.2.6 Ambiente Nakagami- $q$ (Hoyt) . . . . .	12
2.2.7 Ambiente Nakagami- $m$ . . . . .	13
2.3 Análise de Desempenho . . . . .	15
2.3.1 Análise de Desempenho no Canal Rayleigh . . . . .	17
2.3.2 Análise de Desempenho no Canal Hoyt . . . . .	20
2.3.3 Análise de Desempenho no Canal Nakagami- $m$ . . . . .	21
2.4 Conclusão . . . . .	22

<b>3</b>	<b>Ambiente de Propagação <math>\eta - \mu</math></b>	<b>25</b>
3.1	Introdução . . . . .	25
3.2	Desenvolvimento da Fdp da Distribuição de $\eta - \mu$ . . . . .	27
3.3	Fdp do Canal $\eta - \mu$ com Desvanecimento em Função de $w$ . . . . .	32
3.4	Fdp do Canal $\eta - \mu$ com Desvanecimento em Função de $\rho$ . . . . .	33
3.5	Fdp do Canal $\eta - \mu$ com Desvanecimento em Função de $\omega$ . . . . .	35
3.6	Fdp do Canal $\eta - \mu$ com Desvanecimento em Função de $\gamma_b$ . . . . .	35
3.7	A Distribuição $\eta - \mu$ para $\eta \rightarrow 0$ . . . . .	36
3.8	A Distribuição $\eta - \mu$ para $\eta \rightarrow 1$ . . . . .	37
3.9	Relação entre os Parâmetros $\eta$ , $\mu$ e $m$ . . . . .	38
3.10	Relação entre a Distribuição $\eta - \mu$ e outras Distribuições . . . . .	39
3.11	Conclusão . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Análise de Desempenho em um Canal <math>\eta - \mu</math></b>	<b>42</b>
4.1	Introdução . . . . .	42
4.2	Probabilidade de Erro Média para o Canal $\eta - \mu$ . . . . .	43
4.3	Conclusão . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Canal <math>\eta - \mu</math> com Diversidade</b>	<b>58</b>
5.1	Introdução . . . . .	58
5.2	Desenvolvimento da Fdp da Distribuição de $\eta - \mu$ com Diversidade	60
5.2.1	A Distribuição $\eta - \mu$ para $\eta \rightarrow 0$ . . . . .	61
5.2.2	A Distribuição $\eta - \mu$ para $\eta \rightarrow 1$ . . . . .	62
5.3	Análise de Desempenho utilizando Técnica de Diversidade . . . . .	63
5.4	Conclusão . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Geração de Números Aleatórios Distribuídos de Acordo com a</b>	
	<b>Distribuição <math>\eta - \mu</math></b>	<b>72</b>
6.1	Introdução . . . . .	72
6.2	O Método da Aceitação-Rejeição . . . . .	73
6.3	Geração de Números Aleatórios de Acordo com a Distribuição $\eta - \mu$	73
6.4	Conclusão . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Epílogo</b>	<b>78</b>
7.1	Contribuições da Dissertação . . . . .	78
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	79
<b>A</b>	<b>Soma de Variáveis Aleatórias</b>	<b>81</b>
<b>B</b>	<b>Sumário Matemático</b>	<b>83</b>



# Lista de Figuras

2.1	Ilustração do mecanismo de propagação em um ambiente Rayleigh	10
2.2	Fdp de Rayleigh variando-se a potência média do sinal, $\Omega$	11
2.3	Fdp de Hoyt variando-se $q$ , para $\Omega = 1$	12
2.4	Ilustração do mecanismo de propagação em um ambiente Hoyt	13
2.5	Ilustração do mecanismo de propagação em um ambiente Nakagami- $m$	14
2.6	Fdp de Nakagami- $m$ variando-se $m$ , para $\Omega = 2$	15
2.7	Desempenho de algumas modulações binárias e quaternárias em um canal AWGN	17
2.8	Desempenho de algumas modulações binárias e quaternárias em um canal Rayleigh	18
2.9	Desempenho das modulações BPSK, BFSK coerente, BFSK não coerente e DPSK em um canal Rayleigh com diversidade	19
2.10	Probabilidade de erro média em canais Hoyt para as modulações: (a) BFSK não coerente e (b) DPSK, variando-se o parâmetro $q$	21
2.11	Probabilidade de erro média em canais Nakagami- $m$ para as modulações: (a) BFSK não coerente e (b) DPSK, variando-se o parâmetro $m$	22
2.12	Desempenho em um canal Nakagami- $m$ com diversidade (para $m = 2$ ) para as modulações: (a) BPSK, (b) BFSK coerente, (c) BFSK não coerente e (d) DPSK	23
3.1	Ilustração do mecanismo de propagação em um ambiente $\eta - \mu$	26
3.2	Fdp da distribuição $\eta - \mu$ , para os valores da Tabela 3.1	34
3.3	Fdp da distribuição $\eta - \mu$ quando $m = 0,75$ (a) e $m = 1,5$ (b)	34
4.1	Probabilidade de erro média para a modulação BFSK coerente (para $m=0,75$ ) com desvanecimento $\eta - \mu$	46
4.2	Probabilidade de erro média para modulações BPSK, QPSK e OQPSK para $m=1,5$ com desvanecimento $\eta - \mu$	46
4.3	Probabilidade de erro média para modulações BPSK, QPSK e OQPSK para os valores da Tabela 4.3, com desvanecimento $\eta - \mu$	47



4.4	Probabilidade de erro média para modulações BPSK, QPSK e OQPSK para os valores da Tabela 4.4, com desvanecimento $\eta - \mu$	47
4.5	Probabilidade de erro média para a modulação BFSK coerente (para $m=0,75$ ) com desvanecimento $\eta - \mu$	48
4.6	Probabilidade de erro média para modulação BFSK coerente (para $m=1,5$ ) com desvanecimento $\eta - \mu$	48
4.7	Probabilidade de erro média para modulação BFSK coerente para os valores da Tabela 4.3, com desvanecimento $\eta - \mu$	49
4.8	Probabilidade de erro média para modulação BFSK coerente para os valores da Tabela 4.4, com desvanecimento $\eta - \mu$	49
4.9	Probabilidade de erro média para a modulação BFSK não coerente (para $m=0,75$ ) com desvanecimento $\eta - \mu$	50
4.10	Probabilidade de erro média para modulação BFSK não coerente (para $m=1,5$ ) com desvanecimento $\eta - \mu$	50
4.11	Probabilidade de erro média para modulação BFSK não coerente para os valores da Tabela 4.3, com desvanecimento $\eta - \mu$	51
4.12	Probabilidade de erro média para modulação BFSK não coerente para os valores da Tabela 4.4, com desvanecimento $\eta - \mu$	51
4.13	Probabilidade de erro média para modulação DPSK (para $m=0,75$ ) com desvanecimento $\eta - \mu$	52
4.14	Probabilidade de erro média para modulação DPSK (para $m=1,5$ ) com desvanecimento $\eta - \mu$	52
4.15	Probabilidade de erro média para modulação DPSK para os valores da Tabela 4.3, com desvanecimento $\eta - \mu$	53
4.16	Probabilidade de erro média para modulação DPSK para os valores da Tabela 4.4, com desvanecimento $\eta - \mu$	53
4.17	Probabilidade de erro média para modulação $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK (para $m=0,75$ ) com desvanecimento $\eta - \mu$	54
4.18	Probabilidade de erro média para modulação $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK (para $m=1,5$ ) com desvanecimento $\eta - \mu$	54
4.19	Probabilidade de erro média para modulação $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK para os valores da Tabela 4.3, com desvanecimento $\eta - \mu$	55
4.20	Probabilidade de erro média para modulação $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK para os valores da Tabela 4.4, com desvanecimento $\eta - \mu$	55
4.21	Comparação entre a probabilidade de erro média para as modulações BPSK, BFSK coerente, BFSK não coerente, DPSK e $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK, para $\eta = 0,06$ e $\mu = 0,8$	56
5.1	Ilustração da técnica de diversidade	59

5.2	Probabilidade de erro média com diversidade para modulações BPSK, QPSK e OQPSK para $\eta = 0,382$ e $\mu = 0,9$ . . . . .	65
5.3	Probabilidade de erro média com diversidade para modulações BPSK, QPSK e OQPSK para $\eta = 0,06$ e $\mu = 0,3$ . . . . .	65
5.4	Probabilidade de erro média com diversidade para a modulação BFSK coerente para $\eta = 0,382$ e $\mu = 0,9$ . . . . .	66
5.5	Probabilidade de erro média com diversidade para modulação BFSK coerente para $\eta = 0,06$ e $\mu = 0,3$ . . . . .	66
5.6	Probabilidade de erro média com diversidade para a modulação BFSK não coerente para $\eta = 0,382$ e $\mu = 0,9$ . . . . .	67
5.7	Probabilidade de erro média com diversidade para a modulação BFSK não coerente para $\eta = 0,06$ e $\mu = 0,3$ . . . . .	67
5.8	Probabilidade de erro média com diversidade para a modulação DPSK para $\eta = 0,382$ e $\mu = 0,9$ . . . . .	68
5.9	Probabilidade de erro média com diversidade para a modulação DPSK para $\eta = 0,06$ e $\mu = 0,3$ . . . . .	68
5.10	Comparação entre a probabilidade de erro média com diversidade para modulações binárias para $\eta = 0,06$ e $\mu = 1,4$ . . . . .	69
6.1	$t(x)$ , $r(x)$ e $p(x)$ para o método de Aceitação-Rejeição para a distribuição $\eta - \mu$ com os parâmetros $\eta = 0,06$ e $\mu = 0,3$ . . . . .	74
6.2	Comparativo entre a fdp teórica de $\eta - \mu$ e a fdp gerada a partir do método da Acitação-Rejeição para $\eta = 0,06$ e $\mu = 0,2$ . . . . .	74
6.3	Comparativo entre a fdp teórica de $\eta - \mu$ e a fdp gerada a partir do método da Acitação-Rejeição para $\eta = 0,06$ e $\mu = 0,3$ . . . . .	75
6.4	Comparativo entre a fdp teórica de $\eta - \mu$ e a fdp gerada a partir do método da Acitação-Rejeição para $\eta = 0,06$ e $\mu = 0,5$ . . . . .	75
6.5	Comparativo entre a fdp teórica de $\eta - \mu$ e a fdp gerada a partir do método da Acitação-Rejeição para $\eta = 0,06$ e $\mu = 0,8$ . . . . .	76
6.6	Comparativo entre a fdp teórica de $\eta - \mu$ e a fdp gerada a partir do método da Acitação-Rejeição para $\eta = 0,06$ e $\mu = 1$ . . . . .	76
B.1	Sumário matemático . . . . .	88

# Lista de Tabelas

2.1	Probabilidade de erro média para diferentes tipos de modulação em um canal invariante no tempo com ruído AWGN . . . . .	16
2.2	Probabilidade de erro média para diferentes tipos de modulação em canais Rayleigh . . . . .	18
2.3	Valores de $\mathcal{E}$ para diversos tipos de modulações e probabilidade de erro média em canais Rayleigh para valores de $\overline{\gamma}_c > 10dB$ . . . . .	19
2.4	Probabilidade de erro média para as modulações BFSK não coerente e DPSK em canais Hoyt . . . . .	20
2.5	Probabilidade de erro média para as modulações BFSK não coerente e DPSK em canais Nakagami- $m$ . . . . .	21
3.1	Valores de $\eta$ e $\mu$ escolhidos de forma arbitrária para a Figura 3.2 .	33
3.2	Valores de $\eta$ e $\mu$ para $m = 0,75$ e $m = 1,5$ ; calculados a partir da Equação (3.55) . . . . .	34
4.1	Valores de $\eta$ e $\mu$ para $m = 0,75$ ; calculados a partir da Equação (3.55) . . . . .	45
4.2	Valores de $\eta$ e $\mu$ para $m = 1,5$ ; calculados a partir da Equação (3.55) . . . . .	45
4.3	Valores de $\eta$ e $\mu$ escolhidos de forma arbitrária para as Figuras 4.3, 4.7, 4.11, 4.15 e 4.19 . . . . .	45
4.4	Valores de $\eta$ e $\mu$ escolhidos de forma arbitrária para as Figuras 4.4, 4.8, 4.12, 4.16 e 4.20 . . . . .	45
5.1	Probabilidade de erro média para diferentes tipos de modulação em um canal com diversidade e ruído AWGN . . . . .	64
6.1	Comparativo entre as porcentagens de amostras aceitas utilizando o Método da Aceitação-Rejeição da distribuição $\eta - \mu$ . . . . .	77

# Lista de Abreviaturas e Siglas

<b>AWGN</b>	<i>Additive White Gaussian Noise</i> - ruído branco aditivo com função densidade de probabilidade Gaussiana
<b>BPSK</b>	<i>Binary Phase Shift Keying</i> - modulação binária por chaveamento de fase
<b>BFSK Coerente</b>	<i>Binary Frequency Shift Keying</i> - modulação binária por chaveamento de frequência com detecção coerente
<b>BFSK Não Coerente</b>	<i>Binary Frequency Shift Keying</i> - modulação binária por chaveamento de frequência com detecção não coerente
<b>CDMA</b>	<i>Code Division Multiple Access</i> - acesso múltiplo com divisão por código
<b>DPSK</b>	<i>Differential Phase Shift Keying</i> - modulação diferencial por chaveamento de fase
<b>EGC</b>	<i>Equal Gain Combining</i> - combinação de ganho igual
<b>ERB</b>	Estação Rádio Base
<b>fdc</b>	Função distribuição cumulativa
<b>fdp</b>	Função densidade de probabilidade
<b>FSK</b>	<i>Frequency Shift Keying</i> - modulação por chaveamento de frequência
<b>HF</b>	<i>High-Frequency</i>

<b>IS-95A</b>	<i>Interim Standard 95 revision A</i>
<b>IS-136</b>	<i>Interim Standard 136</i>
<b>ISI</b>	<i>Intersymbol Interference</i> - interferência entre símbolos
<b>iid</b>	Variável aleatória independente e identicamente distribuída
<b>LOS</b>	<i>Line of Sight</i> - linha de visada direta
<b>MRC</b>	<i>Maximal Ratio Combining</i> - combinação de máxima razão
<b>MSK</b>	<i>Minimum Shift Keying</i>
<b>NLOS</b>	<i>Non Line of Sight</i> - sem linha de visada direta
<b>OQPSK</b>	<i>Offset Quadrature Phase Shift Keying</i>
<b>PSK</b>	<i>Phase Shift Keying</i> - modulação por chaveamento de fase
<b>QAM</b>	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i>
<b>QPSK</b>	<i>Quadrature Phase Shift Keying</i>
<b>rms</b>	<i>Root Mean Square value</i> - raiz quadrada do valor médio quadrático ou raiz quadrada da potência média normalizada
<b>SC</b>	<i>Selection Combining</i> - combinação de seleção
<b>SHF</b>	<i>Super High-Frequency</i>
<b>SNR</b>	<i>Signal-to-Noise-Ratio</i> - relação sinal ruído

<b>TCM</b>	<i>Trellis Code Modulation</i> - esquema de modulação em treliça
<b>TDMA</b>	<i>Time Division Multiple Access</i> - acesso múltiplo por divisão de tempo
<b>UHF</b>	<i>Ultra High-Frequency</i>
<b>v.a.</b>	variável aleatória
<b>VHF</b>	<i>Very High-Frequency</i>
$\frac{\pi}{4}$ - <b>DQPSK</b>	$\frac{\pi}{4}$ - <i>Differential Quadrature Phase Shift Keying</i>

# Lista de Símbolos

$z$	Argumento da função de Bessel
$I$	Componente em fase do sinal recebido
$Q$	Componente em quadratura do sinal recebido
$dB$	Decibéis
$N_0$	Densidade Espectral de potência de ruído
$g'(\cdot)$	Derivada de uma função $g(\cdot)$
$\sigma$	Desvio padrão
$\rho$	Envoltória normalizada do sinal em relação ao valor médio quadrático de $r$
$r_i$	Envoltória do sinal recebido de acordo com uma distribuição específica do $i$ -ésimo <i>cluster</i>
$r$	Envoltória do sinal recebido distribuída de acordo com uma distribuição específica
$r_k$	Envoltória do sinal recebido de acordo com uma distribuição específica do $k$ -ésimo ramo de diversidade
$E_b$	Energia de bit
$m$	Fator de desvanecimento ou parâmetro $m$ da distribuição de Nakagami- $m$

$q$	Fator de desvanecimento ou parâmetro $q$ da distribuição de Hoyt (Nakagami- $q$ ), é a razão entre o desvio padrão da componente em fase e o desvio padrão da componente em quadratura do sinal
$p(\cdot)$	Função densidade de probabilidade
$\text{erfc}(\cdot)$	Função erro complementar
$\exp(\cdot)$	Função exponencial
$\Gamma(\cdot)$	Função Gama
$Q(\cdot)$	Função Q gaussiana
$g^{-1}(\cdot)$	Função inversa de uma função $g(\cdot)$
$I_n(\cdot)$	Função modificada de Bessel de primeira classe de ordem $n$
$N$	Número de canais da distribuição Nakagami- $m$
$L$	Número de canais ou braços de diversidade
$n$	Número de percursos
$h$	Parâmetro $h$ da distribuição $\eta - \mu$
$H$	Parâmetro $H$ da distribuição $\eta - \mu$
$\mu$	Parâmetro $\mu$ da distribuição $\eta - \mu$
$\eta$	Parâmetro $\eta$ (razão entre a variância da componente em fase e a variância da componente em quadratura do sinal) da distribuição $\eta - \mu$
$\text{Re}(\cdot)$	Parte real
$w_i$	Potência de $r_i$



$w$	Potência do sinal
$\overline{w}_0$	Potência média do $i$ -ésimo <i>cluster</i> do sinal com desvanecimento
$\overline{w}$	Potência média do sinal
$\omega$	Potência normalizada do sinal em relação à potência média do sinal
$p$	Probabilidade da relação sinal ruído instantânea de uma das réplicas do sinal estar abaixo de um determinado valor crítico
$P_e$	Probabilidade de erro média
$P(\gamma_b)$	Probabilidade de erro média por bit em um canal invariante no tempo
$p^L$	Probabilidade de que todas as $L$ réplicas independentes dos sinais desvanecidos possuam relação sinal ruído instantânea abaixo de um valor crítico determinado
$x_i$	Processo aleatório independente com fdp Gaussiana com média zero e variância $\sigma_x^2$
$y_i$	Processo aleatório independente com fdp Gaussiana com média zero e variância $\sigma_y^2$
$\gamma_k$	Relação sinal ruído instantânea do $k$ -ésimo canal
$\gamma_b$	Relação sinal ruído instantânea por bit
$\overline{\gamma}_b$	Relação sinal ruído média por bit
$\overline{\gamma}_c$	Relação sinal ruído média por canal
$\mathcal{L}^{-1}[f(\cdot)]$	Transformada inversa de Laplace de $f(\cdot)$
$\mathcal{L}[f(\cdot)]$	Transformada de Laplace de $f(\cdot)$

$E(\cdot)$	Valor médio ou valor esperado de uma v.a.
$\Omega$	Valor quadrático médio de $r$ ou potência média normalizada total
$\hat{r}$	Valor rms de $r$
$\hat{r}_i$	Valor rms de $r_i$
$s$	Variável complexa de Laplace
$\sigma^2$	Variância
$Var(\cdot)$	Variância

# Resumo

LEMOS, C.P. Avaliação de técnicas para transmissão digital em canal com desvanecimento lento e não seletivo em frequência modelado com a distribuição  $\eta-\mu$ . Santa Rita do Sapucaí, 2001. Instituto Nacional de Telecomunicações.

Nessa dissertação é apresentado um estudo teórico e matemático de canais modelados de acordo com a distribuição  $\eta - \mu$ . Tal distribuição engloba as distribuições de Hoyt e de Nakagami- $m$  como casos especiais. Conseqüentemente, as distribuições de Rayleigh e Semi-Gaussiana Positiva também são obtidas como casos especiais. É apresentada ainda a avaliação de desempenho em termos de probabilidade de erro média do canal de desvanecimento  $\eta-\mu$ , com e sem o uso da técnica de diversidade. São apresentados gráficos da probabilidade de erro média pela relação SNR (relação sinal ruído), calculados a partir de métodos numéricos de integração. Sendo estes gráficos comparados com as tradicionais curvas de probabilidade de erro.

Palavras-chave: Modulação digital, desvanecimento, desempenho, diversidade, distribuição  $\eta-\mu$ , distribuição Nakagami- $m$ , distribuição Hoyt, distribuição Rayleigh.

# Abstract

LEMOS, C.P. Avaliação de técnicas para transmissão digital em canal com desvanecimento lento e não seletivo em frequência modelado com a distribuição  $\eta$ - $\mu$ . Santa Rita do Sapucaí, 2001. Instituto Nacional de Telecomunicações.

In this dissertation, a theoretical and mathematical study about fading channels modeled according to the  $\eta - \mu$  distribution is presented. The  $\eta - \mu$  distribution includes the Hoyt and the Nakagami- $m$  distributions as special cases, and therefore, the One-Sided Gaussian and the Rayleigh distributions also constitute special cases. This dissertation presents the evaluation of performance in terms of average error probability of the  $\eta - \mu$  fading channel with and without the use of the diversity technique. It also presents graphics of the average error probability versus SNR (Signal-to-Noise-Ratio) calculated from numerical methods of integration and compares them with the traditional curves of error probability.

Keywords: Digital modulation, fading, performance, diversity,  $\eta$ - $\mu$  distribution, Nakagami- $m$  distribution, Hoyt distribution, Rayleigh distribution.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Canal com Desvanecimento

Em um canal de comunicação móvel, como o ambiente celular e o canal de satélite, dentre os fenômenos que afetam fortemente a propagação do sinal a ser transmitido estão aqueles relacionados com a atmosfera e com a topografia da região onde se dá a transmissão. Estes fenômenos provocam flutuações no nível de recepção (desvanecimento ou *fading*), ou seja, causam variações rápidas na amplitude do sinal de rádio dentro de um curto período de tempo ou distância. O fenômeno do desvanecimento é causado pela interferência de duas ou mais versões do sinal transmitido que chegam ao receptor com diferentes atenuações e atrasos.

As reflexões especulares provocam propagação por múltiplos percursos, fazendo com que o nível de recepção dependa fortemente da amplitude e fase do sinal resultante da soma vetorial dos vários sinais que chegam à antena de recepção através de percursos secundários. Estas ondas dos múltiplos percursos que chegam à antena do receptor se combinam formando um sinal resultante que pode variar de forma intensa tanto em amplitude quanto em fase. A onda refletida é, na maioria dos casos, tida como uma forma indesejável de propagação, uma vez que a probabilidade desta ajudar somando-se de forma perfeita à portadora é muito pequena. Não obstante, em alguns casos bastante específicos, a onda refletida é uma solução considerável, no intuito de driblar um determinado obstáculo e realizar a interligação entre dois pontos ou mesmo para aplicar a técnica da diversidade.

Uma ação nociva das componentes dos múltiplos percursos é a interferência entre símbolos (ISI - *Intersymbol Interference*) por elas provocada quando o período de símbolo for menor que o maior atraso dos múltiplos percursos. Se o período de símbolo for maior que o maior atraso dos múltiplos percursos teremos apenas desvanecimento na potência do sinal recebido. Outro fator que degrada o sinal transmitido em um canal de comunicação móvel é o movimento relativo entre o

transmissor e o receptor que resulta em uma modulação aleatória de frequência no sinal devido aos diferentes deslocamentos Doppler em cada componente dos múltiplos percursos. O movimento dos objetos entre o transmissor e o receptor provoca um deslocamento Doppler nas componentes dos múltiplos percursos. O deslocamento Doppler provoca dispersão em frequência da portadora, ocasionando espalhamento da banda do sinal, fator este que resulta na degradação de desempenho dos sistemas de comunicação.

Dentre os mais importantes efeitos do desvanecimento, pode-se citar:

- Rápidas variações na intensidade do sinal recebido em pequenos intervalos de tempo ou devido ao deslocamento espacial do receptor.
- Modulação aleatória da frequência devido ao efeito Doppler.
- Dispersão temporal (eco) causado pelo atraso de propagação de cada múltiplo percurso.

Basicamente, o canal com desvanecimento possui uma resposta impulsiva variante no tempo.

Devido ao comportamento aleatório destes fenômenos, o sinal de rádio é usualmente tratado com métodos estatísticos. A modelagem matemática do canal é uma ferramenta útil na compreensão do mesmo e de seus efeitos nos sinais de comunicação. O que fornece bases para que se produzão simulações computacionais que, usualmente, são utilizadas em situações nas quais a análise matemática é extremamente complexa. Deste modo, os equipamentos ou técnicas empregadas em sistemas de rádio móvel podem ser testados por meio de simulações, o que permite uma dinâmica muito grande na variação da totalidade dos parâmetros existentes no sistema de comunicação. Dentre as ferramentas necessárias para a simulação de sistemas de transmissão digital destaca-se a geração de números aleatórios distribuídos de acordo com uma determinada função densidade de probabilidade. Por fim, análises que fazem uso de protótipos reais são, geralmente, mais dispendiosas e demandam mais tempo que o uso de simulações computacionais.

Esta caracterização pode ser utilizada como modelo para sinais de transmissão em vários tipos de canais, tais como comunicação através de ondas ionosféricas ou celestes em ondas curtas na faixa de HF (do inglês, *High-Frequency*)(3-30 MHz), comunicações por ondas troposféricas na faixa de microondas em UHF (do inglês, *Ultra High-Frequency*)(300-3000 MHz), SHF (do inglês, *Super High-Frequency*)(3000-30000 MHz) e por espalhamento ionosférico na faixa das ondas métricas em VHF (do inglês, *Very High-Frequency*)(30-300 MHz).

## 1.2 Tratamento Estatístico

Ao se modelar canais com desvanecimento deve-se observar qual o tipo de distribuição probabilística que melhor se adequa à modelagem dos mesmos.

A distribuição de Rayleigh descreve a envoltória do sinal recebido resultante de uma propagação com múltiplos percursos e sem uma linha de visada direta (NLOS - *Non Line of Sight*) com potência predominante. A distribuição de Nakagami- $m$  utiliza um parâmetro para descrever o grau de desvanecimento sofrido pelo sinal se propagando em um ambiente de múltiplos percursos. A distribuição de Hoyt, também conhecida como distribuição Nakagami- $q$ , descreve ambientes como enlaces de satélite com forte cintilações ionosféricas.

Na verdade, a distribuição de Rayleigh constitui-se um caso especial das distribuições de Hoyt e Nakagami- $m$ , podendo ser obtida de maneira exata através do correto ajuste dos parâmetros destas distribuições [1].

## 1.3 Diversidade

Um dos principais fatores que degradam o desempenho dos sistemas de comunicações móveis é a ocorrência de desvanecimento. A técnica da diversidade é uma das formas de se combater os efeitos da degradação da probabilidade de erro provocada pelo fenômeno do desvanecimento.

A diversidade utiliza a propagação por múltiplos percursos a seu favor, ou seja, o seu princípio é o de fornecer ao receptor a mesma informação através de dois ou mais canais sujeitos a desvanecimentos estatisticamente independentes. A idéia da diversidade baseia-se no fato de que se um caminho sofrer um desvanecimento profundo pode-se esperar que um outro canal independente não sofra. Existem várias técnicas de diversidade, como por exemplo, a diversidade espacial, temporal, em frequência, angular, a diversidade por polarização e sistemas mistos que agregam uma ou mais técnicas de diversidade [2].

Três são as maneiras básicas existentes para associar os sinais recebidos em cada caminho, são os denominados métodos de combinação: Combinação de Máxima Razão (MRC - *Maximal Ratio Combining*), Combinação de Ganho Igual (EGC - *Equal Gain Combining*) e Combinação de Seleção (SC - *Selection Combining*). O método MRC é o que fornece a máxima probabilidade de detecção, por isso, é chamado de método ótimo. Na combinação de máxima razão é fornecido um peso a cada “braço” de sinal proporcional às amplitudes do sinal e então adicionados. Tais pesos minimizam o ruído que é adicionado a cada braço em desvanecimento.

## 1.4 Proposta de Trabalho

A proposição essencial deste trabalho é um estudo teórico e matemático de canais modelados de acordo com a distribuição  $\eta - \mu$  com o objetivo de desenvolver expressões e/ou gráficos de desempenho para algumas modulações. A análise de desempenho será efetuada sem e com o emprego da técnica MRC de diversidade. As probabilidades de erro serão obtidas para canais não seletivo em frequência e sobre o efeito do ruído aditivo AWGN (do inglês, *additive white Gaussian noise*).

Além do capítulo introdutório, há neste estudo mais cinco outros capítulos, organizados da seguinte maneira:

- O Capítulo 2 se inicia com a obtenção da função densidade de probabilidade (fdp) do canal em função de algumas variáveis, que irão auxiliar no desenvolvimento teórico de canais com desvanecimento. Em seguida é apresentado um resumo teórico sobre os ambientes de propagação Rayleigh, Hoyt e Nakagami- $m$  em termos de modelos estatísticos, os quais serão abordados oportunamente como casos especiais do modelo  $\eta - \mu$ . O capítulo se encerra apresentando um resumo sobre a análise de desempenho em termos de probabilidade de erro média, com e sem diversidade, para os canais anteriormente revisados, provendo desta forma, uma base teórica para confirmação dos resultados obtidos nos capítulos subseqüentes.
- O Capítulo 3 trata do ambiente de propagação  $\eta - \mu$ . É feito neste capítulo o desenvolvimento da fdp da distribuição  $\eta - \mu$  em função de várias variáveis, assim como, aproximações válidas para a mesma quando  $\eta \rightarrow 0$  e  $\eta \rightarrow 1$ . O capítulo se encerra com o estabelecimento de relações entre a distribuição  $\eta - \mu$  e as distribuições introduzidas no Capítulo 2. O desenvolvimento da fdp de  $\eta - \mu$  em função da relação SNR (*Signal-to-Noise-Ratio* - relação sinal ruído),  $\gamma_b$ , constitui-se em uma contribuição original desta dissertação.
- O Capítulo 4 é dedicado à análise de desempenho em um canal  $\eta - \mu$ , considerando-se as principais modulações binárias e quaternárias em um canal lento e não seletivo em frequência. O capítulo se encerra com a apresentação de curvas de desempenho que comprovam que a distribuição  $\eta - \mu$  aproxima, de forma exata, às distribuições de Rayleigh, Hoyt e Nakagami- $m$ , como apresentado no Capítulo 3. Os resultados deste capítulo compõem-se outra contribuição original deste trabalho.
- O Capítulo 5 trata do canal  $\eta - \mu$  com diversidade, é apresentado o desenvolvimento da fdp para um ambiente de propagação  $\eta - \mu$  que utiliza da técnica de diversidade. Por fim, são obtidos expressões e gráficos para a probabilidade de erro média de algumas modulações utilizando a técnica



de diversidade e combinação MRC. Os resultados obtidos neste capítulo também são contribuições originais deste trabalho.

- O Capítulo 6 visa demonstrar a utilização de um método estatístico para a geração de números aleatórios distribuídos de acordo com a fdp  $\eta - \mu$ .
- Esta dissertação finda-se com o Capítulo 7 que aborda a proposição de futuros trabalhos que possam dar continuidade a este estudo.

# Capítulo 2

## Ambiente de Propagação e Análise de Desempenho

### 2.1 Introdução

Para a descrição dos parâmetros de propagação em sistemas de comunicações móveis, onde pequenos deslocamentos espaciais podem resultar em grandes variações no nível do sinal recebido, é importante o conhecimento das correspondentes funções distribuição de probabilidade, já que o desvanecimento não é um estudo determinístico, isto é, os fatores que influenciam no sinal recebido são aleatórios. Essa teoria aproxima de resultados experimentais.

No modelamento estatístico de um sinal se propagando são considerados três fatores básicos [3] a saber:

***Perdas de Percurso*** Estão relacionadas com o cálculo da média local do sinal recebido. Podem ser obtidas através de modelos teóricos [4] como o modelo de propagação no espaço livre, modelo do terreno plano, e o modelo de difração para uma obstrução; ou podem ser obtidas através de métodos empíricos como o método de Okumura [5], formulação de Hata [6], método de Lee [7] e método de Ibrahim-Parsons [8], modelos de Difração (modelo de Bullington [9], de Deygout [10] e de Giovanelli [11]) e modelos de Reflexão (Altura Efetiva de Okumura [5] e Altura Efetiva de Lee [7]).

***Efeitos de Sombreamento*** Efeitos relativos às variações do sinal devido às obstruções no percurso transmissor - receptor. As variações ocorrem na média local do sinal afetando apenas o desvanecimento de longo prazo.

***Efeitos de Múltiplos Percursos*** As reflexões especulares provocam a propagação do sinal por múltiplos percursos de modo que tem-se na antenna re-

ceptora, um sinal composto de várias versões do sinal originalmente transmitido. Estas ondas chegam por diferentes ângulos com diferentes tempos de propagação afetando apenas o desvanecimento de curto prazo do sinal.

Uma vez que os fatores anteriormente mencionados fornecem características relevantes a respeito do ambiente de propagação de um sinal rádio, pode-se descrevê-lo considerando-se a combinação dos efeitos de somreamento, dos efeitos de múltiplos percursos e das perdas de percurso. Deste modo, após a modelagem estatística do meio de propagação do sinal rádio, esta modelagem será utilizada para o cálculo do desempenho em termos de probabilidade de erro de bit.

Serão descritos, a seguir, os principais ambientes de propagação através de uma caracterização estatística. E em seguida, será feita uma análise de desempenho em sistemas de comunicações móveis através da descrição da probabilidade de erro dos ambientes de propagação descritos neste capítulo. Por fim, analisar-se-á a probabilidade de erro, utilizando a técnica de diversidade.

## 2.2 Ambientes de Propagação

Quando o desvanecimento afeta sistemas de banda estreita, a envoltória do sinal recebido pode ser modelada por uma variável aleatória (v.a.)  $r$  de valor quadrático médio, ou potência normalizada média total,  $\Omega$  (Equação (2.1)) e com função densidade de probabilidade,  $p(r)$ , a qual depende da natureza do ambiente de rádio propagação.

$$\Omega = E(r^2) \quad (2.1)$$

Após passar pelo canal com desvanecimento, o sinal recebido é perturbado pela adição de ruído aditivo AWGN, o qual é tipicamente assumido como sendo estatisticamente independente da envoltória do sinal recebido,  $r$ . O ruído aditivo é caracterizado pela densidade espectral de potência  $N_0/2$  ( $W/Hz$ ).

Sendo  $r^2$  a potência instantânea do sinal, pode-se definir a relação SNR instantânea por bit como  $\gamma_b$ , dada por:

$$\gamma_b = r^2 \frac{E_b}{N_0}, \quad (2.2)$$

onde  $E_b$  é a energia de bit. Define-se ainda, a SNR média por bit,  $\overline{\gamma_b}$ , como sendo:

$$\overline{\gamma_b} = \Omega \frac{E_b}{N_0} \quad (2.3)$$

Para auxiliar no desenvolvimento teórico de modelos de canais com desvanecimento, faz-se necessária a obtenção da função densidade de probabilidade do

canal em função de algumas variáveis. Tal obtenção se dá através de mudança de variáveis como se segue.

### 2.2.1 Fdp do Canal com Desvanecimento em Função de

$\gamma_b$

A fdp de  $\gamma_b$  se relaciona com a fdp de  $r$  através da seguinte transformação de variáveis:

$$p(\gamma_b) = \frac{p(r)}{g'(r)} \Big|_{r=g^{-1}(\gamma_b)}$$

onde:

$$\begin{cases} g(r) = \gamma_b = r^2 \frac{E_b}{N_0} \\ g'(r) = 2r \frac{E_b}{N_0} \\ g^{-1}(\gamma_b) = \sqrt{\frac{\gamma_b}{\frac{E_b}{N_0}}} \end{cases}$$

e, finalmente,

$$p(\gamma_b) = \frac{p(r)}{2\sqrt{\gamma_b \gamma_b / \Omega}} \Big|_{r=\sqrt{\Omega \gamma_b / \gamma_b}} \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Fdp do Canal com Desvanecimento em Função de $\rho$

Definindo  $\rho$  como sendo a envoltória do sinal normalizada em relação à raiz quadrada do valor quadrático médio (rms - *root mean square value*),  $\hat{r}$ , de  $r$  como mostram as Equações (2.5) e (2.6):

$$\rho = \frac{r}{\hat{r}} \quad (2.5)$$

$$\hat{r} = \sqrt{E(r^2)} = \sqrt{\Omega}, \quad (2.6)$$

tém-se que a fdp de  $\rho$  se relaciona com a fdp de  $r$  através da seguinte transformação de variáveis:

$$p(\rho) = \frac{p(r)}{g'(r)} \Big|_{r=g^{-1}(\rho)}$$

onde:

$$\begin{cases} g(r) = \rho \\ g'(r) = \frac{1}{\hat{r}} \\ g^{-1}(\rho) = \rho \cdot \hat{r} \end{cases}$$

e, finalmente,

$$p(\rho) = \hat{r} \cdot p(r) \Big|_{r=\rho \cdot \hat{r}} \quad (2.7)$$

### 2.2.3 Fdp do Canal com Desvanecimento em Função de $w$

Definindo  $w$  como sendo a potência do sinal com desvanecimento e  $\bar{w}$  como sendo a potência média, como mostram as Equações (2.8) e (2.9) abaixo:

$$w = \frac{r^2}{2} \quad (2.8)$$

$$\bar{w} = E(w) = \frac{\Omega}{2} = \frac{\hat{r}^2}{2}, \quad (2.9)$$

tém-se que a fdp de  $w$  se relaciona com a fdp de  $r$  através da seguinte transformação de variáveis:

$$p(w) = \frac{p(r)}{g'(r)} \Big|_{r=g^{-1}(w)}$$

onde:

$$\begin{cases} g(r) = w \\ g'(r) = r \\ g^{-1}(w) = \sqrt{2w} \end{cases}$$

e, finalmente,

$$p(w) = \frac{p(r)}{r} \Big|_{r=\sqrt{2w}} \quad (2.10)$$

### 2.2.4 Fdp do Canal com Desvanecimento em Função de $\omega$

Definindo  $\omega$  como sendo a potência do sinal com desvanecimento normalizada em relação à potência média, como mostra a Equação abaixo:

$$\omega = \frac{w}{\bar{w}}, \quad (2.11)$$

tém-se que a fdp de  $\omega$  se relaciona com a fdp de  $w$  através da seguinte transformação de variáveis:

$$p(\omega) = \frac{p(w)}{g'(w)} \Big|_{w=g^{-1}(\omega)}$$

onde:

$$\begin{cases} g(w) = \omega \\ g'(w) = \frac{1}{\bar{w}} \\ g^{-1}(\omega) = \omega \cdot \bar{w} \end{cases}$$

e, finalmente,

$$p(\omega) = p(w)\bar{w} \Big|_{w=\omega \cdot \bar{w}} \quad (2.12)$$

A seguir, serão apresentados alguns dos diversos tipos de ambientes de propagação teóricos existentes, descritos por distribuições estatísticas homônimas.

### 2.2.5 Ambiente Rayleigh

Não existindo linha de visada direta - apenas sinais de múltiplos percursos - e sendo elevado o número de sinais, o sinal resultante pode ser considerado como um processo Gaussiano complexo, cuja envoltória obedece a uma distribuição de probabilidade de Rayleigh.

Um sinal propagando-se em um ambiente Rayleigh tem a envoltória da sua componente de curto prazo modelada por uma fdp dada por [12]:

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r \geq 0, \quad (2.13)$$

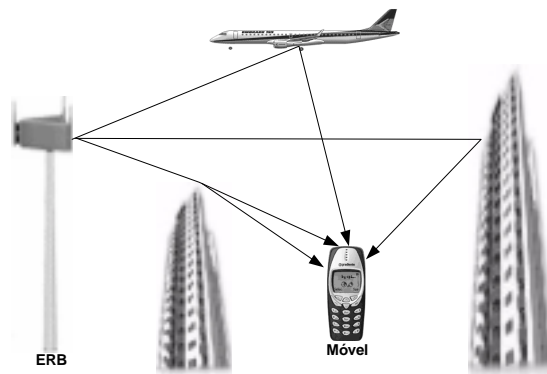
onde  $r$  é a envoltória do sinal e  $\sigma^2$  é a variância das componentes em fase e em quadratura que compõe o sinal  $r$ . Calculando  $\Omega$  através da Equação (2.1), obtém-se que, para o ambiente Rayleigh:

$$\Omega = 2\sigma^2 \quad (2.14)$$

Levando (2.14) em (2.13) produz:

$$p(r) = \frac{2r}{\Omega} \exp\left(-\frac{r^2}{\Omega}\right), \quad r \geq 0 \quad (2.15)$$

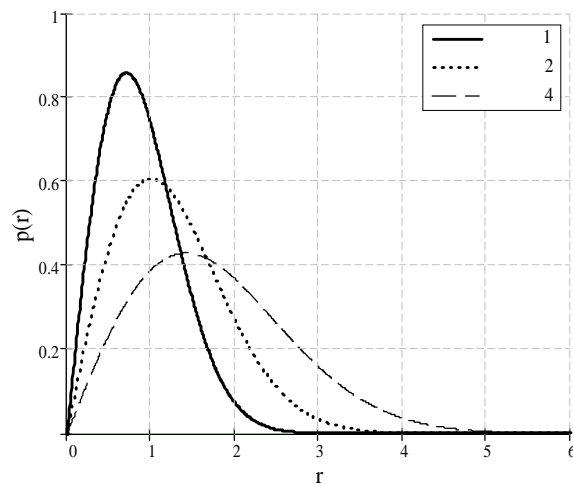
A Figura 2.1 ilustra o mecanismo de propagação em um ambiente Rayleigh.



**Figura 2.1:** Ilustração do mecanismo de propagação em um ambiente Rayleigh

A Figura 2.2 mostra curvas da fdp da distribuição de Rayleigh variando-se o valor da potência média do sinal,  $\Omega$ , de acordo com a Equação (2.15).

Aplicando a mudança de variáveis descrita pela Equação (2.7), obtém-se a



**Figura 2.2:** Fdp de Rayleigh variando-se a potência média do sinal,  $\Omega$

distribuição de Rayleigh normalizada em relação ao valor rms dada por:

$$p(\rho) = 2\rho \cdot \exp(-\rho^2), \quad \rho \geq 0 \quad (2.16)$$

Ainda, através da mudança de variáveis indicada pela Equação (2.4), pode-se obter a fdp de Rayleigh descrita em termos da relação SNR,  $\gamma_b$ , dada por:

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{\gamma_b} \exp\left(-\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (2.17)$$

Em um ambiente de propagação de Rayleigh o sinal na recepção é composto exclusivamente de ondas refletidas com amplitudes equivalentes. Ainda, considera-se que os ângulos de chegada das múltiplas ondas refletidas na recepção segue uma distribuição uniforme de probabilidade entre 0 e  $2\pi$  radianos. Portanto, o modelo de desvanecimento Rayleigh tipicamente se ajusta bem com experimentos de sistemas móveis onde não existe linha de visada direta (LOS - *Line of sight*) entre o transmissor e receptor [2]. Esta modelagem também se aplica à propagação das ondas refletidas e refratadas através da troposfera [13] e ionosfera [14], [15] e os enlaces de rádio nas comunicações marítimas [16].

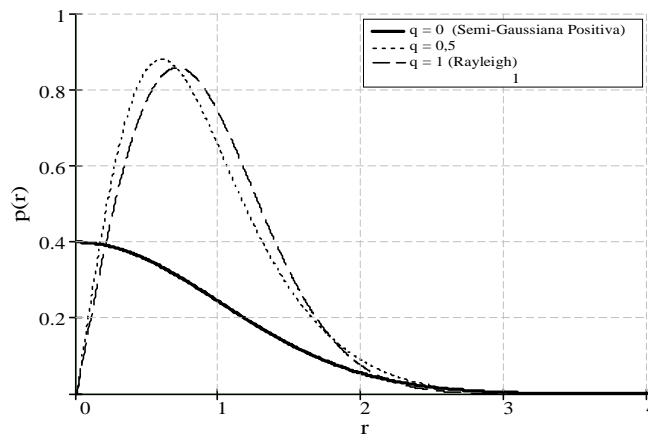
### 2.2.6 Ambiente Nakagami- $q$ (Hoyt)

A distribuição de Nakagami- $q$ , também conhecida como distribuição de Hoyt é dada por [17]:

$$p(r) = \frac{(1+q^2)r}{q\Omega} \exp\left[-\frac{(1+q^2)^2 r^2}{4q^2\Omega}\right] I_0\left[\frac{(1-q^4)r^2}{4q^2\Omega}\right], \quad r \geq 0, \quad (2.18)$$

onde  $I_0(\cdot)$  é a função de Bessel modificada de ordem zero, e  $q$  é o parâmetro Nakagami- $q$  de desvanecimento (razão entre o desvio padrão da componente em fase,  $\sigma_x$ , e o desvio padrão da componente em quadratura,  $\sigma_y$ , do sinal) dado pela Equação (2.19). Observa-se que  $q$  varia de 0 (distribuição Semi-Gaussiana Positiva) até 1 (distribuição de Rayleigh) [18], como visto na Figura 2.3.

$$q = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \quad 0 \leq q \leq 1 \quad (2.19)$$



**Figura 2.3:** Fdp de Hoyt variando-se  $q$ , para  $\Omega = 1$

A Equação (2.18) pode ser escrita novamente levando-se em consideração a Equação (2.6) da seguinte forma:

$$p(r) = \frac{(1+q^2)r}{q \cdot \hat{r}^2} \exp\left[-\frac{(1+q^2)^2}{4q^2} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right] I_0\left[\frac{1-q^4}{4q^2} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right], \quad r \geq 0 \quad (2.20)$$

Aplicando a mudança de variáveis descrita pela Equação (2.7), obtém-se a



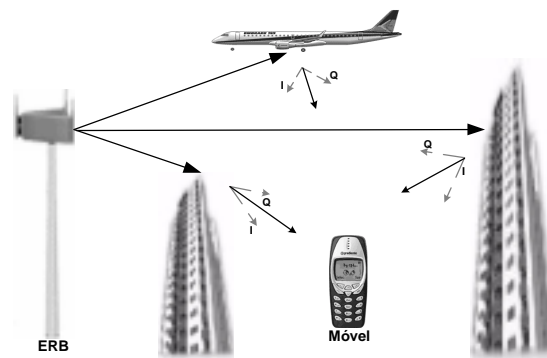
distribuição de Hoyt normalizada em relação ao valor rms dada por:

$$p(\rho) = \frac{(1+q^2)}{q} \rho \cdot \exp \left[ -\frac{(1+q^2)^2}{4q^2} \rho^2 \right] I_0 \left( \frac{1-q^4}{4q^2} \rho^2 \right), \quad \rho \geq 0 \quad (2.21)$$

Ainda, através da mudança de variáveis indicada pela Equação (2.4), pode-se obter a fdp de Hoyt descrita em termos da relação SNR,  $\gamma_b$  dada por:

$$p(\gamma_b) = \frac{1+q^2}{2q\gamma_b} \exp \left[ -\frac{(1+q^2)^2}{4q^2\gamma_b} \gamma_b \right] I_0 \left( \frac{1-q^4}{4q^2\gamma_b} \gamma_b \right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (2.22)$$

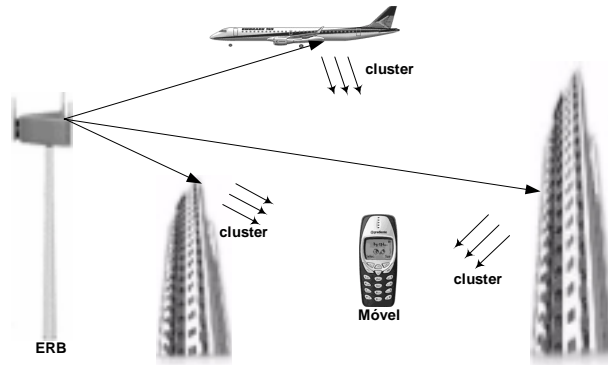
A distribuição de Hoyt é normalmente usada para modelar a propagação de sinais através de enlaces via satélite onde existam fortes cintilações ionosféricas [19]. Neste ambiente assume-se que as componentes em fase e em quadratura do sinal desvanecido possuem potências diferentes, e logo, apresentam desvios padrões diferentes. Porém, não há dentre as várias ondas espalhadas uma que predomine sobre as demais [17] e [20]. A Figura 2.4 ilustra o mecanismo de propagação em um ambiente Hoyt.



**Figura 2.4:** Ilustração do mecanismo de propagação em um ambiente Hoyt

### 2.2.7 Ambiente Nakagami- $m$

A distribuição de Nakagami- $m$  [17] foi introduzida para caracterizar o desvanecimento rápido de sinais na faixa de HF (3 a 30 MHz) para radio difusão a grandes distâncias. O mecanismo de propagação em um ambiente Nakagami- $m$  é ilustrado pela Figura 2.5.



**Figura 2.5:** Ilustração do mecanismo de propagação em um ambiente Nakagami- $m$

A distribuição é dada por:

$$p(r) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\Omega}\right)^m r^{2m-1} \exp\left(-\frac{mr^2}{\Omega}\right), \quad r \geq 0, \quad (2.23)$$

onde  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gama definida como:

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} \exp(-x) dx \quad (2.24)$$

e  $m$  é definido como sendo o fator de desvanecimento dado por:

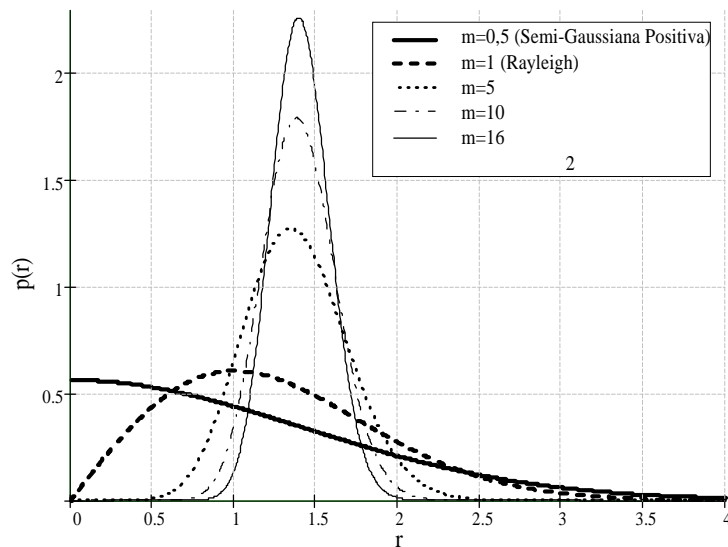
$$m = \frac{\Omega^2}{\text{Var}(r^2)}, \quad m \geq \frac{1}{2} \quad (2.25)$$

A Figura 2.6 mostra a fdp de Nakagami- $m$  para diferentes valores de  $m$ . Note-se que a distribuição Semi-Gaussiana Positiva e a de Rayleigh podem ser obtidas a partir da distribuição de Nakagami- $m$  fazendo o parâmetro  $m$  de Nakagami igual a  $\frac{1}{2}$  e 1, respectivamente. Note-se ainda que, quando  $m \rightarrow \infty$  o canal não possui desvanecimento (canal AWGN - Delta de Dirac)[21]. Portanto, como observado por Nakagami [17], para valores de  $m > 1$  temos um desvanecimento menos severo, e para valores de  $m < 1$  temos um desvanecimento mais severo.

Aplicando a mudança de variáveis descrita pela Equação (2.7), obtém-se a distribuição de Nakagami- $m$  normalizada em relação ao valor rms dada por:

$$p(\rho) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)} \rho^{2m-1} \exp(-m\rho^2), \quad \rho \geq 0 \quad (2.26)$$

Ainda através da mudança de variáveis indicada pela Equação (2.4), pode-se



**Figura 2.6:** Fdp de Nakagami- $m$  variando-se  $m$ , para  $\Omega = 2$

obter a fdp de Nakagami- $m$  descrita em termos da relação SNR,  $\gamma_b$ , dada por:

$$p(\gamma_b) = \frac{m^m}{\Gamma(m)\bar{\gamma}_b^m} \gamma_b^{m-1} \exp \left[ -m \left( \frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_b} \right) \right], \quad \gamma_b \geq 0 \quad (2.27)$$

A distribuição de Nakagami- $m$  possui melhor ajuste às comunicações móveis [22],[23],[24], e *indoor* [25], bem como aos enlaces de rádio ionosféricos [26].

## 2.3 Análise de Desempenho

Na análise de sistemas de comunicações digitais é freqüente a necessidade de se avaliar a probabilidade de erro de bit ou de símbolo, uma vez que, este é um parâmetro amplamente utilizado para se comparar o desempenho de tais sistemas.

Por exemplo, a expressão para se determinar a probabilidade de erro em um sistema com modulação  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK ( $\frac{\pi}{4}$  *Differential Quadrature Phase Shift Keying*), como função da relação sinal ruído,  $\gamma_b$ , em um canal invariante no tempo com ruído AWGN, é dado por [12]:

$$P_{\frac{\pi}{4}DQPSK}(\gamma_b) = Q \left[ \sqrt{4\gamma_b} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \right) \right], \quad (2.28)$$

onde  $Q(x)$ , função Q gaussiana, é definida como sendo o complemento da função distribuição cumulativa (fdc) de uma v.a.  $X$  com distribuição Normal (0,1) (média zero e variância unitária).  $Q(x)$  pode ser expressa através da função

erro complementar da seguinte forma:

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (2.29)$$

A probabilidade  $P_{\frac{\pi}{4}DQPSK}(\gamma_b)$  é vista como sendo uma probabilidade condicional, onde a condição é que  $r$  não varia. Para obter-se a probabilidade de erro quando o canal é variante no tempo, ou seja, quando,  $r$  é variável, deve-se fazer a média de  $P_{\frac{\pi}{4}DQPSK}(\gamma_b)$  sobre a função densidade de probabilidade de  $\gamma_b$ . Ou seja, deve-se avaliar a seguinte integral:

$$P_e = \int_0^\infty P_{\frac{\pi}{4}DQPSK}(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b, \quad (2.30)$$

onde  $p(\gamma_b)$  é a função densidade de probabilidade de  $\gamma_b$  quando  $r$  é uma v.a..

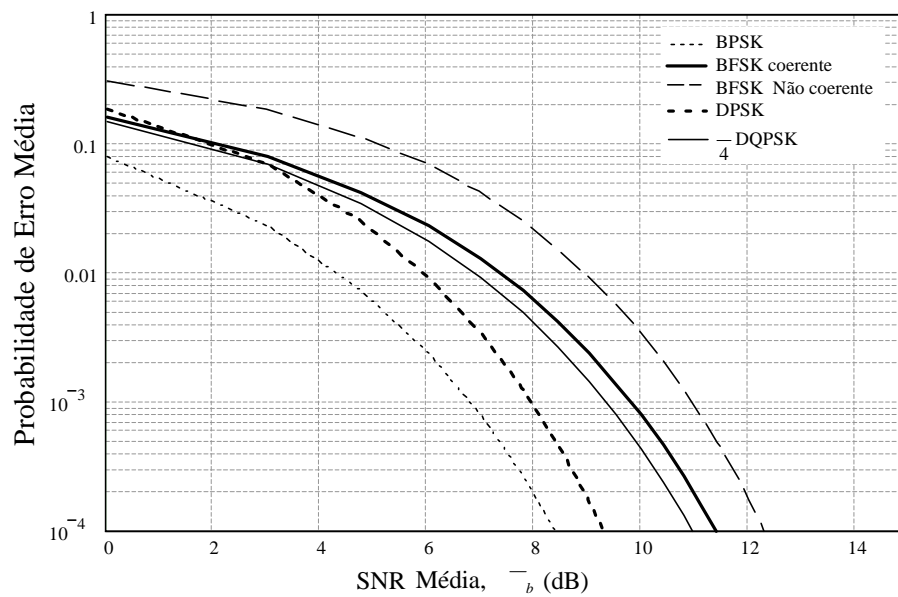
De uma maneira genérica, deve-se avaliar a integral descrita pela Equação (2.30), onde  $P(\gamma_b)$  é a probabilidade para  $r$  fixo para os diversos tipos de modulações dados na Tabela 2.1, como visto na Equação (2.31).

**Tabela 2.1:** Probabilidade de erro média para diferentes tipos de modulação em um canal invariante no tempo com ruído AWGN

Modulação	$P(\gamma_b)$
BPSK, QPSK, OQPSK	$Q(\sqrt{2\gamma_b})$
BFSK coerente	$Q(\sqrt{\gamma_b})$
BFSK não coerente	$\frac{\exp(-\frac{\gamma_b}{2})}{2}$
DPSK	$\frac{\exp(-\gamma_b)}{2}$
$\frac{\pi}{4}$ -DQPSK	$Q\left[\sqrt{4\gamma_b} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)\right]$

Na Figura 2.7 é vista a probabilidade de erro média para os tipos de modulações da Tabela 2.1. Para transmissões utilizando a técnica de diversidade, a função densidade de probabilidade deve estar em função do número  $L$  de canais, como será posteriormente demonstrado.

$$P_e = \int_0^\infty P(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b \quad (2.31)$$



**Figura 2.7:** Desempenho de algumas modulações binárias e quaternárias em um canal AWGN

### 2.3.1 Análise de Desempenho no Canal Rayleigh

#### Análise de desempenho no canal Rayleigh sem diversidade

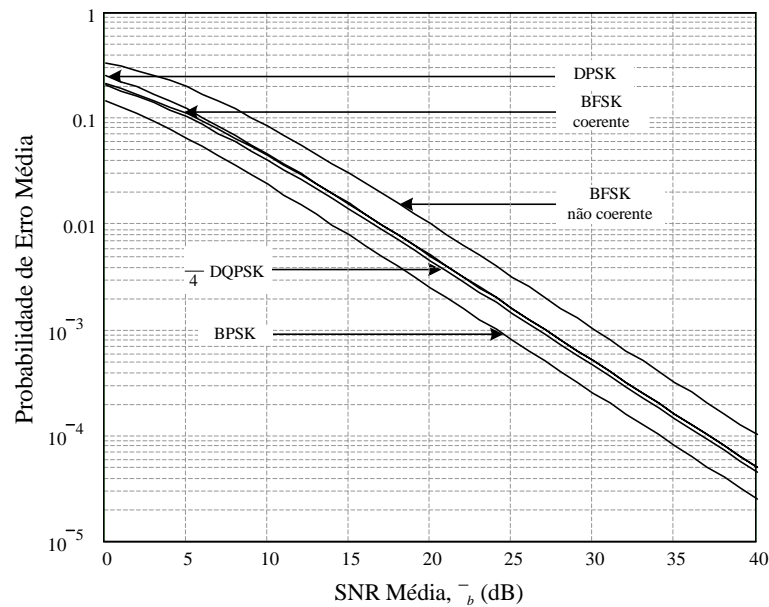
Em canais modelados de acordo com a distribuição de probabilidade Rayleigh, pode-se encontrar expressões fechadas para a probabilidade de erro média resolvendo-se a integral descrita pela Equação (2.31), onde  $P(\gamma_b)$  é obtido através da Tabela 2.1 para os diversos tipos de modulações e  $p(\gamma_b)$  é dada pela Equação (2.17). Nos casos em que  $P(\gamma_b)$  é modelada pela função  $Q(\cdot)$ , como no caso da modulação  $\frac{\pi}{4}$ DQPSK, a integral da Equação (2.31) torna-se uma integral dupla. E para solucioná-la, pode-se aplicar uma mudança de ordem de integração para regiões não retangulares [27].

A Tabela 2.2 apresenta a probabilidade de erro média em canais Rayleigh para diversos tipos de modulações, todas como soluções fechadas da Equação (2.31). As curvas de desempenho descritas pela Tabela 2.2 são apresentadas na Figura 2.8.

Note-se que para o ambiente de propagação Rayleigh a probabilidade de erro passa a ter uma relação inversamente proporcional à relação SNR. Tal situação é típica para esquemas de modulações sem codificação, onde a maior intempérie é a grande quantidade de energia necessária para se obter uma baixa probabilidade de erro média.

**Tabela 2.2:** Probabilidade de erro média para diferentes tipos de modulação em canais Rayleigh

Modulação	$P_e(\bar{\gamma}_b)$
BPSK, QPSK, OQPSK	$\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{1+\bar{\gamma}_b}} \right)$
BFSK coerente	$\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_b}{2+\bar{\gamma}_b}} \right)$
BFSK não coerente	$\frac{1}{2+\bar{\gamma}_b}$
DPSK	$\frac{1}{2(1+\bar{\gamma}_b)}$
$\frac{\pi}{4}$ -DQPSK	$\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{0,556\bar{\gamma}_b}{1+0,556\bar{\gamma}_b}} \right)$

**Figura 2.8:** Desempenho de algumas modulações binárias e quaternárias em um canal Rayleigh

### Análise de desempenho no canal Rayleigh com diversidade

A Equação (2.32) mostra a probabilidade de erro média em canais Rayleigh com diversidade [12].

$$P_e(\mathcal{E}, L) = \left[ \frac{1}{2} (1 - \mathcal{E}) \right]^L \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1+k}{k} \left[ \frac{1}{2} (1 + \mathcal{E}) \right]^k, \quad (2.32)$$

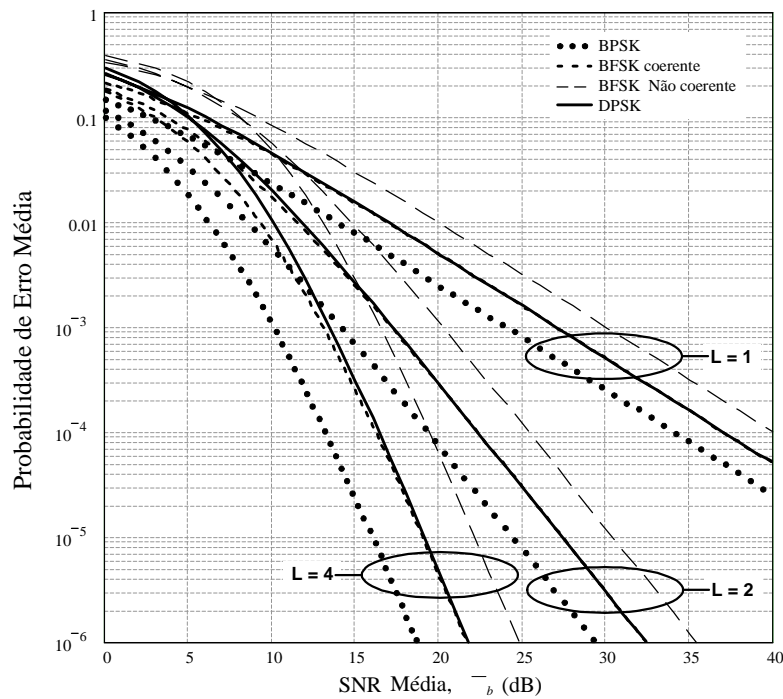
onde  $\mathcal{E}$  é uma constante que depende de  $\bar{\gamma}_c$  e da modulação utilizada (Tabela 2.3),  $\bar{\gamma}_c$  é a relação SNR média por canal e  $L$  é o número de canais ou braços de

diversidade.

**Tabela 2.3:** Valores de  $\mathcal{E}$  para diversos tipos de modulações e probabilidade de erro média em canais Rayleigh para valores de  $\bar{\gamma}_c > 10dB$

Modulação	$\mathcal{E}$	$P_e$ para $\bar{\gamma}_c > 10dB$
BPSK, QPSK, OQPSK	$\sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{1+\bar{\gamma}_c}}$	$\left(\frac{1}{4\bar{\gamma}_c}\right)^L \binom{2L-1}{L}$
BFSK coerente	$\sqrt{\frac{\bar{\gamma}_c}{2+\bar{\gamma}_c}}$	$\left(\frac{1}{2\bar{\gamma}_c}\right)^L \binom{2L-1}{L}$
BFSK não coerente	$\frac{\bar{\gamma}_c}{2+\bar{\gamma}_c}$	$\left(\frac{1}{\bar{\gamma}_c}\right)^L \binom{2L-1}{L}$
DPSK	$\frac{\bar{\gamma}_c}{1+\bar{\gamma}_c}$	$\left(\frac{1}{2\bar{\gamma}_c}\right)^L \binom{2L-1}{L}$

A Figura 2.9 mostra, a título de exemplo, o gráfico de desempenho de algumas modulações binárias em canais com desvanecimento Rayleigh com diversidade. A



**Figura 2.9:** Desempenho das modulações BPSK, BFSK coerente, BFSK não coerente e DPSK em um canal Rayleigh com diversidade

probabilidade de erro de bit é descrita como função da relação SNR média por bit,  $\bar{\gamma}_b$ , que é relacionado com a relação SNR média por canal,  $\bar{\gamma}_c$  por:

$$\bar{\gamma}_b = L\bar{\gamma}_c$$

### 2.3.2 Análise de Desempenho no Canal Hoyt

A Tabela 2.4 apresenta as Equações fechadas para a probabilidade de erro média em canais modelados de acordo com a distribuição de Hoyt, levando-se em conta as modulações BFSK (do inglês, *Binary Frequency Shift Keying*) não coerente e DPSK (do inglês, *Differential Phase Shift Keying*). Estas expressões fechadas para o cálculo da probabilidade de erro foram obtidas por meio do cálculo da integral da Equação (2.31) e com o auxílio da diretiva indicada pela Equação (2.33) ([28]6.611.4).

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x) I_\nu(\beta x) dx = \frac{\beta^{-\nu} \left( \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)^\nu}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}},$$

$$Re(\nu) > -1, \quad Re(\alpha) > |Re(\beta)| \quad (2.33)$$

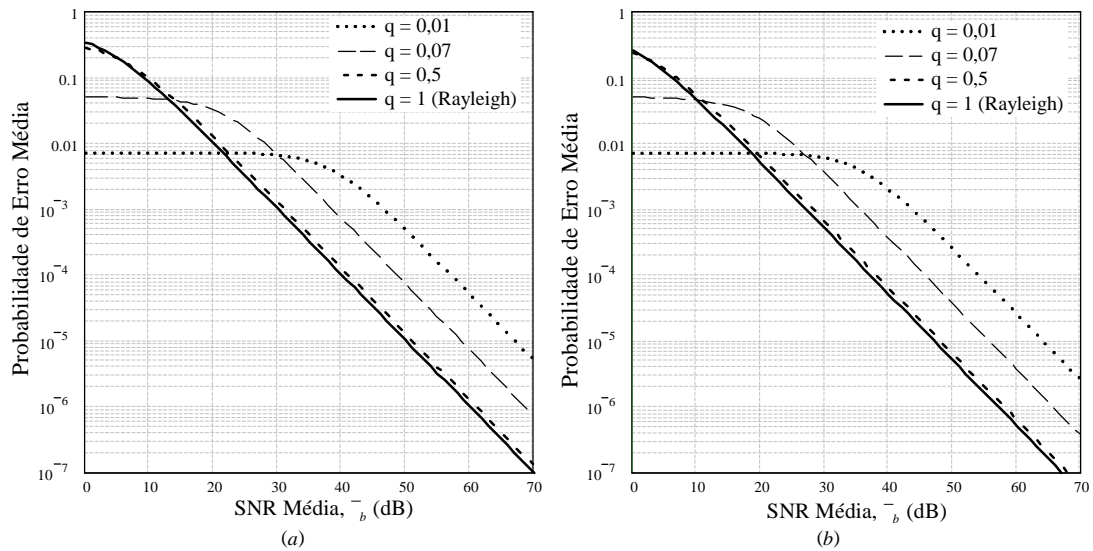
**Tabela 2.4:** Probabilidade de erro média para as modulações BFSK não coerente e DPSK em canais Hoyt

Modulação	$P_e(\bar{\gamma}_b)$
BFSK não coerente	$\frac{q(1+q^2)}{\sqrt{[2q^2\bar{\gamma}_b+(1+q^2)^2]^2+(1-q^4)^2}}$
DPSK	$\frac{q(1+q^2)}{\sqrt{[4q^2\bar{\gamma}_b+(1+q^2)^2]^2+(1-q^4)^2}}$

As modulações BPSK, QPSK, OQPSK, BFSK coerente e  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK são avaliadas através de integração numérica da Equação (2.31). A Figura 2.10 mostra, a título de exemplo, a probabilidade de erro média para as modulações BFSK não coerente e DPSK, variando-se o valor do parâmetro  $q$  definido na Equação (2.19).

Da Figura 2.10 observa-se que o desempenho das modulações BFSK não coerente e DPSK, em um ambiente com desvanecimento do tipo Hoyt, são similares. E comparando-se a Figura 2.10 com a Figura 2.8 observa-se que, como dito anteriormente, quando  $q$  assume o valor 1 (um), o canal com desvanecimento Hoyt aproxima de maneira exata o canal com desvanecimento Rayleigh. Ainda, analisando-se a Figura 2.10, nota-se que para valores de  $q$  pequenos, na ordem dos centésimos, a probabilidade de erro média cai se a relação SNR aumentar consideravelmente.





**Figura 2.10:** Probabilidade de erro média em canais Hoyt para as modulações : (a) BFSK não coerente e (b) DPSK, variando-se o parâmetro  $q$

### 2.3.3 Análise de Desempenho no Canal Nakagami- $m$

#### Análise de desempenho no canal Nakagami- $m$ sem diversidade

A Tabela 2.5 apresenta as Equações fechadas para a probabilidade de erro média em canais modelados de acordo com a distribuição de Nakagami- $m$ , levando-se em conta as modulações BFSK não coerente e DPSK. Estas expressões fechadas para o cálculo da probabilidade de erro foram obtidas por meio do cálculo da integral da Equação (2.31) e com o auxílio da diretiva indicada pela Equação (2.34) ([29]15.73).

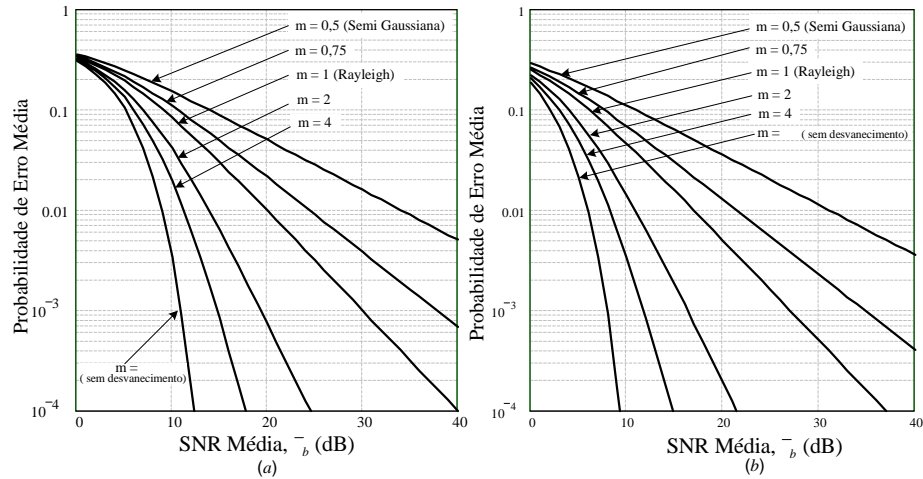
$$\int_0^{\infty} x^v \exp(-\alpha x) dx = \frac{\Gamma(v+1)}{\alpha^{v+1}} \quad (2.34)$$

**Tabela 2.5:** Probabilidade de erro média para as modulações BFSK não coerente e DPSK em canais Nakagami- $m$

Modulação	$P_e(\bar{\gamma}_b)$
BFSK não coerente	$\frac{1}{2} \left( \frac{2m}{2m + \bar{\gamma}_b} \right)^m$
DPSK	$\frac{1}{2} \left( \frac{m}{m + \bar{\gamma}_b} \right)^m$

As modulações BPSK, QPSK, OQPSK, BFSK coerente e  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK são avaliadas através de integração numérica da Equação (2.31). A Figura 2.11 mostra,

a título de exemplo, a probabilidade de erro média para as modulações BFSK não coerente e DPSK, variando-se o valor do parâmetro  $m$  definido na Equação (2.25).



**Figura 2.11:** Probabilidade de erro média em canais Nakagami- $m$  para as modulações: (a) BFSK não coerente e (b) DPSK, variando-se o parâmetro  $m$

### Análise de desempenho no canal Nakagami- $m$ com diversidade

Para canais situados em ambientes Nakagami- $m$ , a probabilidade de erro média pode ser obtida através da Equação (2.32) fazendo-se:

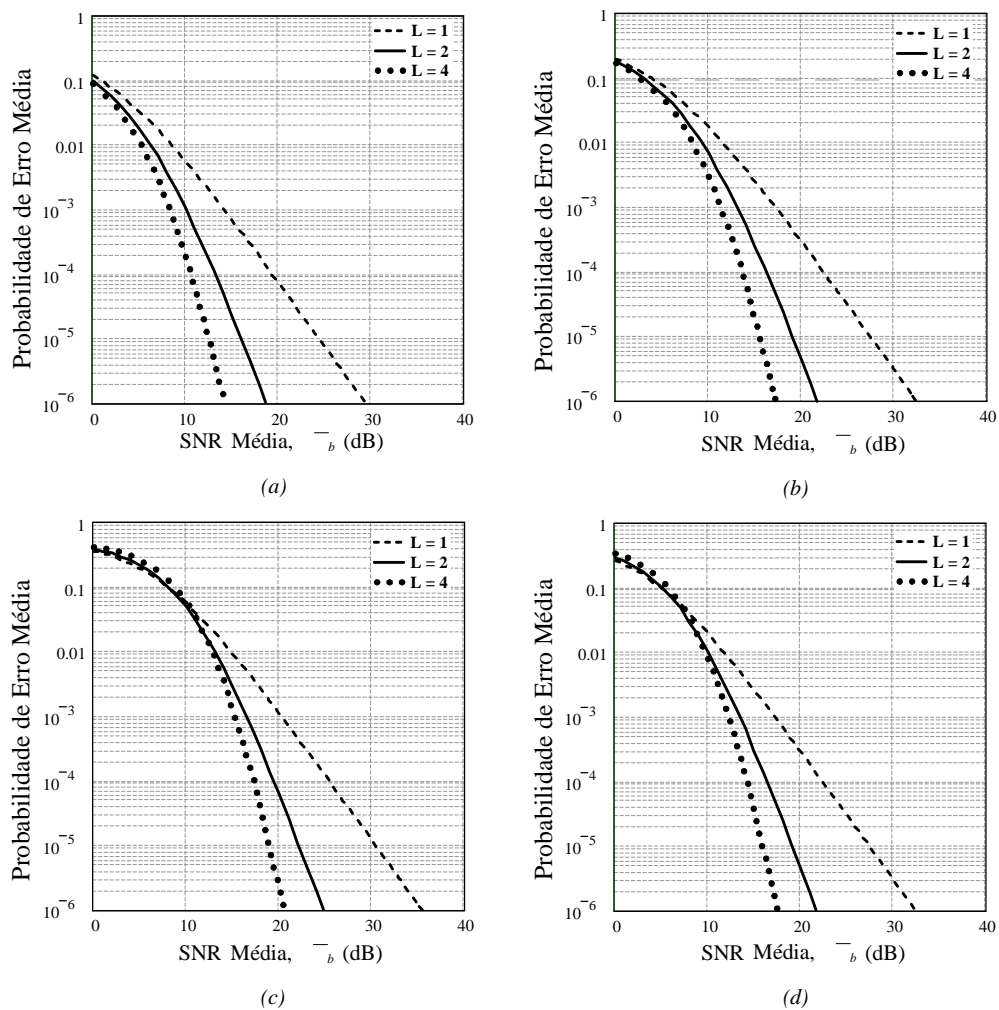
$$L = Nm, \quad (2.35)$$

conforme demonstrado em [12], onde  $N$  é o número de canais da distribuição Nakagami- $m$  e,  $m$  deve ser inteiro.

A Figura 2.12 mostra, a título de exemplo, o gráfico de desempenho de algumas modulações binárias em canais com desvanecimento Nakagami- $m$  com diversidade, para  $m = 2$ .

## 2.4 Conclusão

Através deste capítulo pôde se observar que a inclusão de um canal variante no tempo, como os já citados Rayleigh, Hoyt e Nakagami- $m$ , leva a uma degradação de desempenho do sistema para uma dada probabilidade de erro permissível, devido aos efeitos nocivos provocados pelos múltiplos percursos existentes em um ambiente de propagação móvel.



**Figura 2.12:** Desempenho em um canal Nakagami- $m$  com diversidade (para  $m = 2$ ) para as modulações: (a) BPSK, (b) BFSK coerente, (c) BFSK não coerente e (d) DPSK

Para sistemas de comunicação limitados em frequência, ou seja, para sistemas onde a largura de faixa é fator limitante [20], uma alternativa de combate à queda de desempenho seria o aumento da potência de transmissão. Aumenta-se a relação SNR de modo a manter a probabilidade de erro dentro do limite permissível. Por exemplo, utilizando-se a modulação DPSK para se ter uma probabilidade de erro de  $10^{-4}$ , se comparado a um canal AWGN, seria necessário um acréscimo em torno de 12 dB na potência transmitida em um canal Nakagami- $m$  para  $m = 2$  (Figura 2.11). Este acréscimo torna-se inviável, para a maioria dos casos, devido à limitação da potência dos transmissores.

Uma alternativa ao uso de técnicas de modulação que economizem potência seria a utilização de códigos de correção de erro (também conhecidos como códigos de canal) para se economizar potência ou para melhorar o desempenho para uma dada taxa de erro permissível (desempenho de erro), ao custo da expansão

da largura de faixa. Esquemas de modulação em treliça (TCM- *Trellis Code Modulation*) tem sido utilizados para melhorar o desempenho de erro em canais onde a largura de faixa disponível para a transmissão é limitada; estes métodos não serão considerados neste estudo.

A alternativa para a melhora do desempenho do sistema apresentada, neste capítulo, é o uso da técnica de diversidade na recepção. Como se pode verificar na Figura 2.12, se o sistema possuir apenas dois braços de diversidade, reduz-se a potência de transmissão em aproximadamente 6dB em relação à potência necessária para se manter a probabilidade de erro média em  $10^{-4}$  em um ambiente com desvanecimento Nakagami- $m$ , considerando-se a modulação DPSK. Estes braços de diversidade podem ser a utilização de duas antenas receptoras separadas na ERB (Estação Rádio Base).

Neste capítulo foram estabelecidas importantes transformações de variáveis que permitem a obtenção das fdp de um determinado ambiente de desvanecimento, em função de  $\gamma_b$ ,  $\rho$ ,  $w$  ou em função de  $\omega$  a partir da fdp em função da envoltória do sinal recebido,  $p(r)$ . Apresentou-se ainda, um breve resumo teórico sobre algumas das distribuições estatísticas mais utilizadas na modelagem de canais em sistemas de transmissão digital. Por fim, apresentou-se algumas expressões e gráficos da probabilidade de erro média com e sem diversidade para as distribuições de Rayleigh, Hoyt e Nakagami- $m$ , provendo assim, uma base teórica para a confirmação das expressões deduzidas nos Capítulos 4 e 5 para a distribuição  $\eta - \mu$ .

# Capítulo 3

## Ambiente de Propagação $\eta - \mu$

### 3.1 Introdução

Antes de se analisar o ambiente de propagação  $\eta - \mu$ , faz-se necessário definir o chamado campo (ambiente) de espalhamento homogêneo, o qual é resultante de pontos de espalhamento distribuídos aleatoriamente.

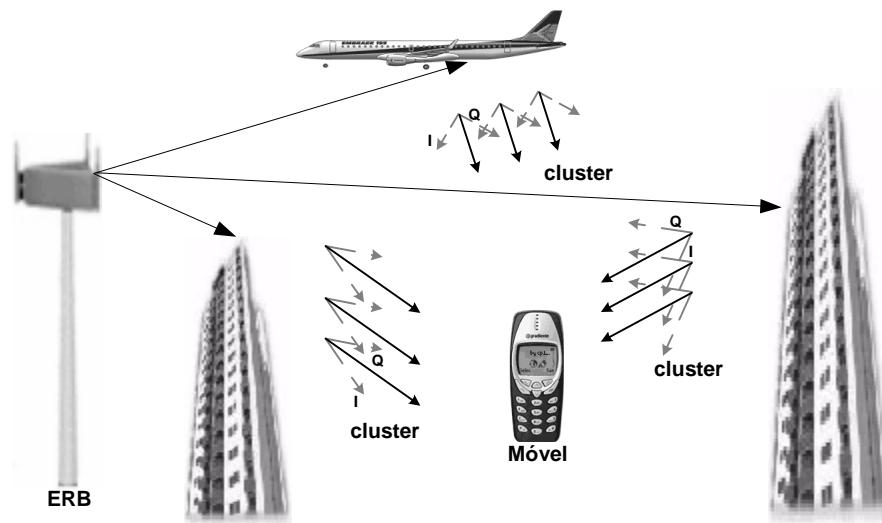
Um campo de espalhamento homogêneo apresenta as seguintes características [24]:

- Grande número de ondas parciais;
- Amplitudes das ondas parciais idênticas ;
- Ondas parciais descorrelacionadas;
- Nenhuma correlação entre fase e amplitude de uma onda parcial;
- Distribuição de fase homogênea entre  $[0, 2\pi]$ .

Os modelos de distribuição de desvanecimento mais conhecidos são obtidos assumindo-se campos de espalhamento difuso homogêneo [1]. Partindo desta hipótese, o teorema do limite central leva a um processo Gaussiano complexo com variáveis em fase e em quadratura com distribuições Gaussianas  $x$  e  $y$  possuindo média zero e variâncias,  $\sigma^2$ , iguais ( $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ ).

Supondo-se a existência de apenas um *cluster*, ou seja, a existência de um conjunto de ondas espalhadas, a distribuição de Rayleigh pode ser obtida. No ambiente Hoyt, considera-se a existência de apenas um *cluster* e assume-se que as componentes em fase e em quadratura do sinal desvanecido apresentam desvios padrões diferentes, não havendo dentre as várias ondas espalhadas uma que predomine sobre as demais. O sinal de Nakagami- $m$  pode ser entendido como

sendo um conjunto de *clusters*, onde, dentro de cada *cluster* as fases das ondas espalhadas são aleatórias e possuem atrasos temporais semelhantes, e entre os diferentes *clusters*, o espalhamento ou o atraso entre as ondas é relativamente grande. A suposição de um ambiente de espalhamento difuso homogêneo é certamente uma aproximação, já que as superfícies são espacialmente correlacionadas, caracterizando um ambiente não homogêneo [1]. Na modelagem a partir da distribuição  $\eta-\mu$  o ambiente de propagação é considerado não homogêneo. A Figura 3.1 ilustra o mecanismo de propagação em um ambiente  $\eta-\mu$ .



**Figura 3.1:** Ilustração do mecanismo de propagação em um ambiente  $\eta-\mu$

O sinal que se propaga em um ambiente  $\eta-\mu$  é considerado composto de vários *clusters* com ondas oriundas dos múltiplos percursos. Dentro de cada *cluster*, as fases das ondas são aleatórias e possuem atrasos no tempo semelhantes e, entre os vários *clusters*, os atrasos das ondas são relativamente grandes. Assume-se que as componentes em fase e em quadratura do sinal desvanecido possuem potências diferentes, e logo, apresentam desvios padrões diferentes. Não havendo dentre as várias ondas espalhadas uma que predomine sobre as demais [1], [17] e [20]. Trata-se as distribuições Semi-Gaussiana Positiva, de Rayleigh, de Hoyt e a de Nakagami- $m$  (que generaliza as anteriores) como casos especiais da distribuição  $\eta-\mu$ , a qual oferece ainda, um elevado grau de liberdade.

## 3.2 Desenvolvimento da Fdp da Distribuição de

$$\eta - \mu$$

Seja  $r$  a envoltória do sinal recebido, descrita pelas suas componentes em fase e quadratura, da seguinte forma:

$$r^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2), \quad (3.1)$$

onde,  $x_i$  e  $y_i$  são processos aleatórios independentes com função densidade de probabilidade Gaussiana com média zero e variâncias  $\sigma_x^2$  e  $\sigma_y^2$ , respectivamente, do  $i$ -ésimo *cluster*:

$$\begin{aligned} E(x_i) &= E(y_i) = 0 \\ E(x_i^2) &= \sigma_x^2 \quad E(y_i^2) = \sigma_y^2 \end{aligned}$$

Um dos modos de se obter a fdp,  $p(r)$ , da distribuição de  $\eta - \mu$ , é primeiro conseguir a fdp do  $i$ -ésimo *cluster*,  $p(r_i)$ . Seja então o seguinte processo:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2, \quad (3.2)$$

onde  $r_i$  é a envoltória do  $i$ -ésimo *cluster*, por conseguinte,

$$r^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad (3.3)$$

Do mesmo modo, pode-se escrever:

$$w = \sum_{i=1}^n w_i, \quad (3.4)$$

onde  $w$  é a potência do sinal desvanecido definida pela Equação (2.8) e  $w_i$  é a potência de  $r_i$  definida por:

$$w_i = \frac{r_i^2}{2} \quad (3.5)$$

Reescrevendo-se  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$  como sendo:

$$\mathcal{R} = \mathcal{X} + \mathcal{Y}, \quad (3.6)$$

onde:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= r_i^2 \\ \mathcal{X} &= x_i^2 \\ \mathcal{Y} &= y_i^2\end{aligned}$$

Como exposto no Anexo A, conhecendo-se  $\mathcal{L}[p(\mathcal{X})]$  e  $\mathcal{L}[p(\mathcal{Y})]$  pode-se encontrar:

$$\mathcal{L}[p(\mathcal{R})] = \mathcal{L}[p(\mathcal{X})]\mathcal{L}[p(\mathcal{Y})] \quad (3.7)$$

$$p(\mathcal{R}) = \mathcal{L}^{-1} \{ \mathcal{L}[p(\mathcal{R})] \} \quad (3.8)$$

e, finalmente, encontrar  $p(r_i)$  através de mudança de variáveis, como se segue:

$$\begin{aligned}p(x_i) &= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma_x^2}\right), \quad x_i \geq 0 \\ p(\mathcal{X}) &= \frac{p(x_i)}{2\sqrt{\mathcal{X}}} \Big|_{x_i=\sqrt{\mathcal{X}}} + \frac{p(x_i)}{2\sqrt{\mathcal{X}}} \Big|_{x_i=-\sqrt{\mathcal{X}}} \\ p(\mathcal{X}) &= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi\mathcal{X}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{X}}{2\sigma_x^2}\right), \quad \mathcal{X} \geq 0\end{aligned}$$

De modo similar pode-se obter:

$$\begin{aligned}p(y_i) &= \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma_y^2}\right), \quad y_i \geq 0 \\ p(\mathcal{Y}) &= \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi\mathcal{Y}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{Y}}{2\sigma_y^2}\right), \quad \mathcal{Y} \geq 0\end{aligned}$$

Portanto, tem-se que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[p(\mathcal{X})] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi\mathcal{X}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{X}}{2\sigma_x^2}\right)\right] \\ \mathcal{L}[p(\mathcal{X})] &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma_x} \sqrt{s + \frac{1}{2\sigma_x^2}}}\end{aligned} \quad (3.9)$$

Analogamente, tem-se que:

$$\mathcal{L}[p(\mathcal{Y})] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi\mathcal{Y}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{Y}}{2\sigma_y^2}\right)\right]$$



$$\mathcal{L}[p(\mathcal{Y})] = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_y \sqrt{s + \frac{1}{2\sigma_y^2}}} \quad (3.10)$$

Substituindo (3.9) e (3.10) em (3.7), resulta:

$$\mathcal{L}[p(\mathcal{R})] = \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y \sqrt{\left(s + \frac{1}{2\sigma_x^2}\right) \left(s + \frac{1}{2\sigma_y^2}\right)}} \quad (3.11)$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace indicada pela Equação (3.8), na Equação (3.11), obtém-se:

$$p(\mathcal{R}) = \frac{1}{2\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2}\right)\mathcal{R}\right] I_0\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma_x^2} - \frac{1}{\sigma_y^2}\right)\mathcal{R}\right], \quad \mathcal{R} \geq 0 \quad (3.12)$$

O parâmetro  $\eta$  é definido como a razão entre a variância da componente em fase e a variância da componente em quadratura do sinal:

$$\eta = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \quad (3.13)$$

Substituindo a Equação (3.13) em (3.12), tem-se:

$$p(\mathcal{R}) = \frac{\sqrt{\eta}}{2\sigma_x^2} \exp\left[-\left(\frac{\eta+1}{4\sigma_x^2}\right)\mathcal{R}\right] I_0\left[\left(\frac{\eta-1}{4\sigma_x^2}\right)\mathcal{R}\right], \quad \mathcal{R} \geq 0 \quad (3.14)$$

Finalmente, para obter-se  $p(r_i)$ , executa-se a seguinte mudança de variável:

$$p(r_i) = p(\mathcal{R})2\sqrt{\mathcal{R}} \Big|_{\mathcal{R}=r_i^2},$$

obtendo-se:

$$p(r_i) = \frac{\sqrt{\eta}r_i}{\sigma_x^2} \exp\left[-\frac{(\eta+1)r_i^2}{4\sigma_x^2}\right] I_0\left[\frac{(\eta-1)r_i^2}{4\sigma_x^2}\right], \quad r_i \geq 0 \quad (3.15)$$

De acordo com [1],  $0 \leq \eta \leq 1$  define a região onde  $\sigma_x^2 \leq \sigma_y^2$ , enquanto  $1 \leq \eta \leq \infty$  define a região onde  $\sigma_y^2 \leq \sigma_x^2$ . De fato, a distribuição  $\eta - \mu$  é simétrica para  $1 \leq \eta \leq \infty$  e, devido a esta simetria em torno de  $\eta = 1$  é suficiente que se considere  $\eta$  apenas para um destes intervalos, optou-se pelo intervalo  $0 \leq \eta \leq 1$  devido à sua compacidade.

Como exposto no Anexo A, pode-se calcular  $E(r_i^2)$  da seguinte forma\*:

$$E(r_i^2) = \frac{d}{dv} \left\{ \mathcal{L}[p(r_i^2)] \Big|_{s=-v} \right\} \Big|_{v=0}$$

$$E(r_i^2) = \hat{r}_i^2 = (1 + \eta^{-1})\sigma_x^2, \quad (3.16)$$

onde  $\hat{r}_i$  é o valor rms de  $r_i$ . Definindo-se os parâmetros  $h$  e  $H$  como:

$$h = \frac{2 + \eta^{-1} + \eta}{4} = \frac{(1 + \eta)^2}{4\eta} \quad (3.17)$$

$$H = \frac{\eta^{-1} - \eta}{4} = \frac{1 - \eta^2}{4\eta} \quad (3.18)$$

pode-se reescrever a Equação (3.15) como:

$$p(r_i) = \frac{2\sqrt{h}r_i}{\hat{r}_i^2} \exp\left(-\frac{hr_i^2}{\hat{r}_i^2}\right) I_0\left(\frac{Hr_i^2}{\hat{r}_i^2}\right), \quad r_i \geq 0 \quad (3.19)$$

Através da mudança de variável definida pela Equação (2.10) aqui reproduzida:

$$p(w) = \frac{p(r)}{r} \Big|_{r=\sqrt{2w}},$$

pode-se obter a fdp de  $w_i$ ,  $p(w_i)$ , como exposto abaixo:

$$p(w_i) = \frac{\sqrt{h}}{\bar{w}_0} \exp\left(-\frac{hw_i}{\bar{w}_0}\right) I_0\left(\frac{Hw_i}{\bar{w}_0}\right), \quad w_i \geq 0, \quad (3.20)$$

onde,  $\bar{w}_0$  é definido como sendo a potência média do  $i$ -ésimo *cluster* do sinal com desvanecimento:

$$\bar{w}_0 = E(w_i) = \frac{E(r_i^2)}{2} = \frac{\hat{r}_i^2}{2}$$

Como  $w_1, w_2, \dots, w_n$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid), tem-se que a transformada de Laplace da soma  $w = w_1 + w_2 + \dots + w_n$  é o produto das transformadas de Laplace de cada v.a.  $w_1, w_2, \dots, w_n$  (Anexo A). Portanto, pode-se aplicar a Equação (A.7) para se obter a fdp de  $\eta - \mu$  em função da potência do sinal com desvanecimento  $w$ , como se segue:

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

---

\*  $\mathcal{L}[p(r_i^2)] = \mathcal{L}[p(\mathcal{R})]$ , pois,  $\mathcal{R} = r_i^2$ .

$$\mathcal{L}[p(w)] = \{\mathcal{L}[p(w_i)]\}^n$$

$$\mathcal{L}[p(w)] = \{\mathcal{L}[p(w_i)]\}^n = \left\{ \frac{\sqrt{h}}{\bar{w}_0 \sqrt{\left(s + \frac{h}{\bar{w}_0}\right)^2 - \left(\frac{H}{\bar{w}_0}\right)^2}} \right\}^n$$

Calculando-se a transformada inversa de Laplace de  $\mathcal{L}[p(w)]$ , obtém-se a fdp de  $\eta - \mu$  em função de  $w$ , dada por:

$$p(w) = \frac{\sqrt{\pi} n^{\frac{n+1}{2}} h^{\frac{n}{2}}}{(2H)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \bar{w}} \left(\frac{w}{\bar{w}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left(-\frac{nhw}{\bar{w}}\right) I_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{nHw}{\bar{w}}\right), \quad (3.21)$$

onde  $\bar{w}$  é definido por:

$$\bar{w} = E(w) = nE(w_i) = n\bar{w}_0 \quad (3.22)$$

e,  $I_\nu(\cdot)$  é a função de Bessel modificada de ordem arbitrária  $\nu$ , a qual pode ser expressa como:

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (3.23)$$

Aplicando a mudança de variável descrita pela Equação (3.24) obtém-se a fdp da distribuição de  $\eta - \mu$  em função da envoltória do sinal recebido  $r$ ,  $p(r)$ , dada pela Equação (3.25).

$$p(r) = p(w) \sqrt{2w} \Big|_{w=\frac{r^2}{2}} \quad (3.24)$$

$$p(r) = \frac{2\sqrt{\pi} n^{\frac{n+1}{2}} h^{\frac{n}{2}}}{\hat{r} (2H)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^n \exp\left[-nh \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right] I_{\frac{n-1}{2}}\left[nH \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right], \quad r \geq 0, \quad (3.25)$$

onde  $\hat{r}$  é definido como sendo o valor rms de  $r$ , ou seja:

$$\hat{r} = \sqrt{E(r^2)} = \sqrt{2\bar{w}} \quad (3.26)$$

O valor quadrático médio de  $r$  pode ser obtido a partir da Equação (A.3) (Anexo A) aqui reproduzida:

$$E(r^n) = \frac{d^n}{dv^n} \left\{ \mathcal{L}[p(r)] \Big|_{s=-v} \right\} \Big|_{v=0}$$

, ou seja:

$$E(r^2) = \frac{d}{dv} \left\{ \mathcal{L}[p(r^2)] \Big|_{s=-v} \right\} \Big|_{v=0}$$

$$E(r^2) = n(1 + \eta)\sigma_y^2 \quad (3.27)$$

Ainda a partir da Equação (A.3) (Anexo A), pode-se obter:

$$E(r^4) = 2(n\sigma_x\sigma_y)^2 + n^2\sigma_x^4 + n^2\sigma_y^4 + 2n\sigma_x^4 + 2n\sigma_y^4 \quad (3.28)$$

A partir das Equações (3.27) e (3.28), acima, obtém-se a variância da potência, dada por:

$$Var(r^2) = 2n(1 + \eta^2)\sigma_y^4 \quad (3.29)$$

Elevando-se a Equação (3.27) ao quadrado e dividindo o resultado pela Equação (3.29), vem:

$$\frac{E^2(r^2)}{Var(r^2)} = \frac{n(1 + \eta)^2}{2(1 + \eta^2)} \quad (3.30)$$

A constante  $\frac{n}{2}$  pode ser totalmente definida pela Equação (3.30) em função dos parâmetros físicos: valor quadrático médio, variância e potência das componentes em fase e em quadratura do sinal desvanecido. Apesar destes parâmetros possuírem natureza contínua, o parâmetro  $\frac{n}{2}$  é de natureza discreta (inteiro multiplicado por  $\frac{1}{2}$ ). Como as demais distribuições que modelam canais em comunicações digitais, a distribuição  $\eta - \mu$  é uma aproximação do chamado problema da fase aleatória [1]. Deste modo, para tornar a limitação do modelo menos rigorosa, define-se  $\mu$  como sendo a extensão no domínio real de  $\frac{n}{2}$  (Equação (3.31)).

$$\mu = \frac{E^2(r^2)}{Var(r^2)} \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (3.31)$$

Utilizando-se as definições anteriores e após algumas manipulações algébricas obtém-se a fdp da envoltória do sinal recebido dada por:

$$p(r) = \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu}{\hat{r}\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{2\mu} \exp\left[-2\mu h\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right] I_{\mu-\frac{1}{2}}\left[2\mu H\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right], \quad r \geq 0 \quad (3.32)$$

### 3.3 Fdp do Canal $\eta - \mu$ com Desvanecimento em Função de $w$

Partindo da Equação 3.21, utilizando-se as definições estabelecidas na seção anterior e após algumas manipulações algébricas, obtém-se a fdp de  $\eta - \mu$  em função

da potência  $w$  dada por:

$$p(w) = \frac{2\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu}{\bar{w}\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}}\left(\frac{w}{\bar{w}}\right)^{\mu-\frac{1}{2}}\exp\left(-2\mu h\frac{w}{\bar{w}}\right)I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H\frac{w}{\bar{w}}\right), \quad w \geq 0 \quad (3.33)$$

Pode-se expressar o parâmetro  $\mu$  da Equação (3.31) em função de  $w$  como:

$$\mu = \frac{E^2(w)}{Var(w)} \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (3.34)$$

### 3.4 Fdp do Canal $\eta - \mu$ com Desvanecimento em Função de $\rho$

Aplicando a mudança de variáveis descrita pela Equação (2.7), reescrita abaixo:

$$p(\rho) = \hat{r} \cdot p(r)|_{r=\rho\hat{r}},$$

obtem-se a distribuição  $\eta - \mu$  normalizada em relação ao valor rms dada por:

$$p(\rho) = \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu}{\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}}\rho^{2\mu}\exp(-2\mu h\rho^2)I_{\mu-\frac{1}{2}}(2\mu H\rho^2), \quad \rho \geq 0 \quad (3.35)$$

Pode-se expressar o parâmetro  $\mu$  da Equação (3.31) em função de  $\rho$  como:

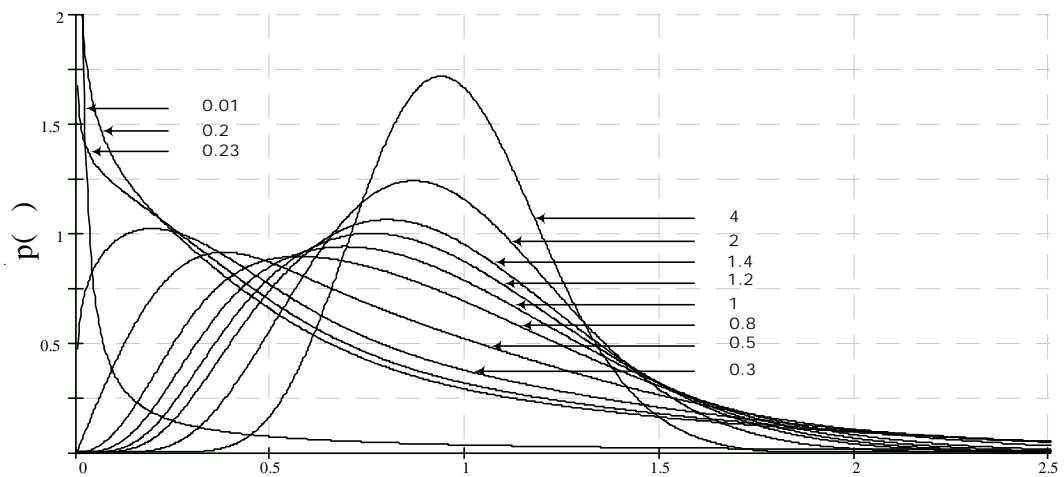
$$\mu = \frac{1}{Var(\rho^2)} \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (3.36)$$

A Figura 3.2 descreve a fdp da descreve a fdp da distribuição  $\eta - \mu$  para os parâmetros estabelecidos na Tabela 3.1, cujos valores foram escolhidos de forma arbitrária, não respeitando a relação estabelecida pela Equação (3.55) que será vista oportunamente.

**Tabela 3.1:** Valores de  $\eta$  e  $\mu$  escolhidos de forma arbitrária para a Figura 3.2

$\eta = 0,06$											
$\mu$	0,01	0,2	0,23	0,3	0,5	0,8	1	1,2	1,4	2	4
$m$	0,011	0,224	0,258	0,336	0,56	0,896	1,12	1,344	1,568	2,24	4,478

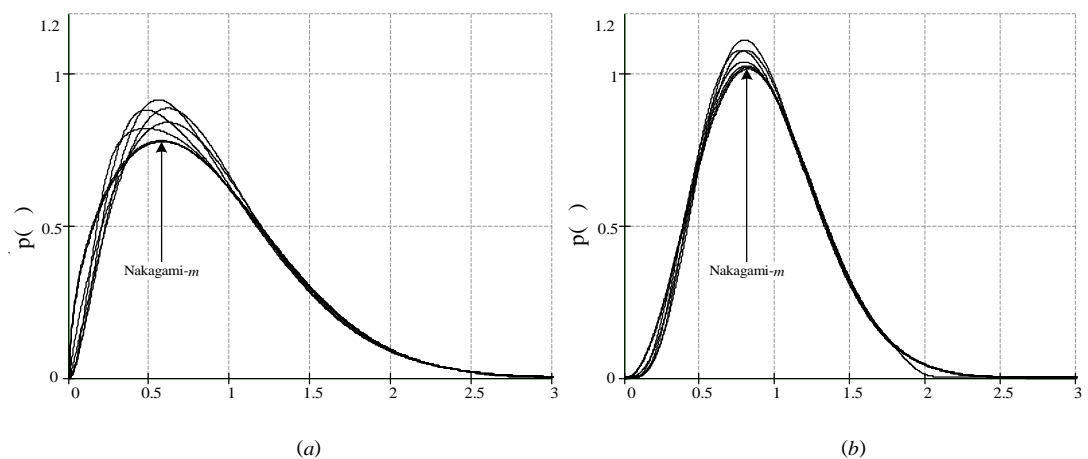
Não obstante, a Figura 3.3 foi gerada em conformidade com os valores da Tabela 3.2 os quais foram obtidos consoante com a Equação (3.55).



**Figura 3.2:** *Fdp da distribuição  $\eta - \mu$ , para os valores da Tabela 3.1*

**Tabela 3.2:** *Valores de  $\eta$  e  $\mu$  para  $m = 0,75$  e  $m = 1,5$ ; calculados a partir da Equação (3.55)*

$m = 0,75$								
$\eta$	0	0,005	0,026	0,055	0,127	0,225	0,382	1
$\mu$	0,75	0,743	0,713	0,676	0,6	0,525	0,45	0,375
$m = 1,5$								
$\eta$	0	0,005	0,026	0,055	0,127	0,225	0,382	1
$\mu$	1,5	1,485	1,426	1,352	1,2	1,05	0,9	0,75



**Figura 3.3:** *Fdp da distribuição  $\eta - \mu$  quando  $m = 0,75$  (a) e  $m = 1,5$  (b)*

### 3.5 Fdp do Canal $\eta - \mu$ com Desvanecimento em Função de $\omega$

Aplicando a mudança de variáveis descrita pela Equação (2.12), reescrita abaixo:

$$p(\omega) = p(w)\bar{w}|_{w=\omega\bar{w}},$$

obtem-se a distribuição  $\eta - \mu$  normalizada em relação à potência normalizada,  $\omega$ , dada por:

$$p(\omega) = \frac{2\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu}{\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}}\omega^{\mu-\frac{1}{2}}\exp(-2\mu h\omega)I_{\mu-\frac{1}{2}}(2\mu H\omega), \quad \omega \geq 0 \quad (3.37)$$

Pode-se expressar o parâmetro  $\mu$  da Equação (3.31) em função de  $\omega$  como:

$$\mu = \frac{1}{Var(\omega)} \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (3.38)$$

### 3.6 Fdp do Canal $\eta - \mu$ com Desvanecimento em Função de $\gamma_b$

Sendo  $\gamma_b$  e  $\bar{\gamma}_b$  conforme definidos nas Equações (2.2) e (2.3), respectivamente, pode-se obter a fdp da distribuição  $\eta - \mu$  em função da relação SNR média,  $p(\gamma_b)$ , aplicando-se a mudança de variáveis descrita pela Equação (2.4).

$$p(\gamma_b) = \frac{2\sqrt{\pi}h^\mu}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{\mu}{\bar{\gamma}_b}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h\frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_b}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H\frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_b}\right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (3.39)$$

Vale lembrar que a expressão da fdp em função da relação SNR média é largamente utilizada no cálculo da probabilidade de erro média, conforme será demonstrado nos capítulos 4 e 5. Pode-se expressar o parâmetro  $\mu$  da Equação (3.31) em função de  $\gamma_b$  como:

$$\mu = \frac{E^2(\gamma_b)}{Var(\gamma_b)} \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (3.40)$$

A seguir, nas seções 3.7 e 3.8, são obtidas expressões para a distribuição  $\eta - \mu$  considerando-se os casos onde uma simples substituição de parâmetros ( $\eta \rightarrow 0$  ou  $\eta \rightarrow 1$ ) nas fórmulas que descrevem as funções densidade de probabilidade deste

canal incorreria em indeterminações.

### 3.7 A Distribuição $\eta - \mu$ para $\eta \rightarrow 0$

De acordo com [30](página 377, equação 9.7.1), para um valor de  $\nu$  fixo e quando o módulo do argumento da função de Bessel,  $|z|$ , for suficientemente grande, pode-se estabelecer a seguinte aproximação:

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \quad (3.41)$$

#### A Distribuição $\eta - \mu$ em função de $\rho$

No caso da distribuição  $\eta - \mu$  normalizada em relação ao valor rms, dada pela Equação (3.35), o argumento da função de Bessel é dado por:

$$z = 2\mu H \rho^2, \quad \rho \geq 0,$$

que pode ainda ser escrito como:

$$z = \frac{\mu \rho^2}{2} \left( \frac{1}{\eta} - \eta \right), \quad \rho \geq 0 \quad (3.42)$$

Para  $\eta \rightarrow 0$ ,  $z$  tenderá ao infinito. Como dito anteriormente, quando  $|z|$  assume valores altos, pode-se aplicar a aproximação dada pela Equação (3.41) na Equação (3.35), o que leva à seguinte expressão aproximada para a fdp da distribuição  $\eta - \mu$  normalizada em relação ao valor rms:

$$p(\rho) \approx \frac{2\mu^\mu}{\Gamma(\mu)} \left( \frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^\mu \rho^{2\mu-1} \exp[-\mu\rho^2(\eta+1)], \quad \rho \geq 0 \quad (3.43)$$

#### A Distribuição $\eta - \mu$ em função de $\gamma_b$

A fdp da distribuição  $\eta - \mu$  em função da relação SNR média é dada pela Equação (3.39) já vista. Neste caso, o argumento da função de Bessel é:

$$z = 2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_b}, \quad \gamma_b \geq 0,$$

que pode ainda ser escrito como:

$$z = \frac{\mu \gamma_b}{2\gamma_b} \left( \frac{1}{\eta} - \eta \right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (3.44)$$



Fazendo  $\eta \rightarrow 0$ ,  $|z|$  assumirá valores elevados:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} z = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\mu \gamma_b}{2\gamma_b} \left( \frac{1}{\eta} - \eta \right) = \infty$$

De acordo com a Equação (3.41), quando o argumento da função de Bessel,  $z$ , assume valores altos, é válida a seguinte aproximação:

$$I_{\mu-\frac{1}{2}} \left( 2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_b} \right) \approx \frac{\exp \left( 2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_b} \right)}{\sqrt{2\pi 2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_b}}}, \quad \gamma_b \geq 0 \quad (3.45)$$

Por fim, substituindo a Equação (3.45) na Equação (3.39), tem-se a seguinte aproximação para a fdp da distribuição  $\eta - \mu$  em função da relação SNR média:

$$p(\gamma_b) \approx \left( \frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^\mu \frac{\mu^\mu}{\Gamma(\mu)\gamma_b^\mu} \gamma_b^{\mu-1} \exp \left[ -\mu(\eta+1) \frac{\gamma_b}{\gamma_b} \right], \quad \gamma_b \geq 0 \quad (3.46)$$

### 3.8 A Distribuição $\eta - \mu$ para $\eta \rightarrow 1$

Segundo [30](página 375, equação 9.6.7), para um valor de  $\nu$  fixo e quando o argumento da função de Bessel,  $z$ , tender à zero, pode-se estabelecer a seguinte aproximação:

$$I_\nu(z) \approx \left( \frac{z}{2} \right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}, \quad \nu \neq (-1, -2, \dots) \quad (3.47)$$

#### A Distribuição $\eta - \mu$ em função de $\rho$

Considerando-se a distribuição  $\eta - \mu$  normalizada em relação ao valor rms, dada pela Equação (3.35) e fazendo  $\eta \rightarrow 1$ , tem-se que o argumento da função de Bessel descrito pela equação (3.42) tende à zero, como demonstrado abaixo:

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} z = \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{\mu \rho^2}{2} \left( \frac{1}{\eta} - \eta \right) = 0$$

De acordo com a Equação (3.47), quando o argumento da função de Bessel assume valores tendendo à zero, pode-se aproximar a fdp da distribuição  $\eta - \mu$  normalizada em relação ao valor rms como se segue:

$$p(\rho) \approx \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{2\mu}\rho^{4\mu-1}}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \left[ \frac{(1+\eta)^2}{4\eta} \right]^\mu \exp \left[ -2\mu \frac{(1+\eta)^2}{4\eta} \rho^2 \right], \quad \rho \geq 0 \quad (3.48)$$

Arranjando a fórmula da duplicação dada por [30](página 256, equação 6.1.18), aqui reproduzida pela Equação (3.49), tem-se:

$$\Gamma(2\mu) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} 2^{2\mu-\frac{1}{2}} \Gamma(\mu) \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \quad (3.49)$$

$$2^{2\mu-\frac{1}{2}} \Gamma(\mu) \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) = \Gamma(2\mu) \sqrt{2\pi} \quad (3.50)$$

Por fim, com o uso da Equação (3.50) acima, pode-se escrever a Equação (3.48) da seguinte forma:

$$p(\rho) \approx \frac{2(2\mu)^{2\mu}}{\Gamma(2\mu)} \rho^{2(2\mu)-1} \left[ \frac{(1+\eta)^2}{4\eta} \right]^\mu \exp \left[ -2\mu \frac{(1+\eta)^2}{4\eta} \rho^2 \right], \quad \rho \geq 0 \quad (3.51)$$

### A Distribuição $\eta - \mu$ em função de $\gamma_b$

Considerando-se a distribuição  $\eta - \mu$  em função da relação SNR média (dada pela Equação (3.39)) e fazendo  $\eta \rightarrow 1$ , o argumento da função de Bessel (dado pela Equação (3.44)), tende à zero, como demonstrado abaixo:

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} z = \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{\mu \gamma_b}{2\gamma_b} \left( \frac{1}{\eta} - \eta \right) = 0$$

De acordo com a Equação (3.47), quando  $z \rightarrow 0$ , é válida a seguinte aproximação:

$$I_{\mu-\frac{1}{2}} \left( 2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_b} \right) \approx \left( \mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_b} \right)^{\mu-\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}, \quad \gamma_b \geq 0 \quad (3.52)$$

Considerando-se aproximação descrita pela Equação (3.52) e a Equação (3.50), a fdp da distribuição  $\eta - \mu$  em função da relação SNR média pode ser aproximada por:

$$p(\gamma_b) \approx \frac{(2\mu)^{2\mu} \gamma_b^{2\mu-1}}{\Gamma(2\mu) \gamma_b^{2\mu}} \left[ \frac{(1+\eta)^2}{4\eta} \right]^\mu \exp \left[ -2\mu \frac{(1+\eta)^2}{4\eta} \frac{\gamma_b}{\gamma_b} \right], \quad \gamma_b \geq 0 \quad (3.53)$$

## 3.9 Relação entre os Parâmetros $\eta, \mu$ e $m$

Usualmente define-se:

$$m = \frac{E^2(r^2)}{Var(r^2)} \quad (3.54)$$

que é o parâmetro utilizado na distribuição de Nakagami- $m$ . Logo, pode-se definir uma relação entre os parâmetros  $m$ ,  $\eta$  e  $\mu$  a partir das Equações (3.54) e (3.31) dada por:

$$\mu = m \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (3.55)$$

A Equação (3.55), acima, é válida desde que respeitados os seguintes limites [1]:

$$\frac{m}{2} \leq \mu \leq m \quad (3.56)$$

$$\eta = \frac{\frac{\mu}{m} - \sqrt{2\frac{\mu}{m} - 1}}{1 - \frac{\mu}{m}} \quad (3.57)$$

### 3.10 Relação entre a Distribuição $\eta - \mu$ e outras Distribuições

A distribuição de Hoyt pode ser obtida, de maneira exata, a partir da fdp da distribuição de  $\eta - \mu$  ajustando-se o parâmetro  $\mu = \frac{1}{2}$  (ou seja, para apenas um *cluster*) e respeitando a relação existente entre o fator de Hoyt,  $q$ , e a razão entre a variância da componente em fase e a variância da componente em quadratura,  $\eta$ , dada pela seguinte Equação:

$$\eta = q^2, \quad (3.58)$$

Por exemplo, fazendo-se  $\mu = \frac{1}{2}$  na Equação (3.35), esta reduz-se a:

$$p(\rho) = 2\sqrt{h}\rho \cdot \exp(-h\rho^2)I_0(H\rho^2), \quad \rho \geq 0, \quad (3.59)$$

que é a fdp de Hoyt normalizada em relação ao valor rms tal qual expressa pela Equação (2.21).

A distribuição de Rayleigh pode ser obtida, de modo exato, fazendo-se  $\eta = 1$  na Equação (3.59). Ou seja, ajustando-se os parâmetros da distribuição  $\eta - \mu$  como  $\eta = 1$  e  $\mu = \frac{1}{2}$ , resultando em:

$$p(\rho) = 2\rho \cdot e^{-\rho^2}, \quad (3.60)$$

que é a fdp de Rayleigh normalizada em relação ao valor rms tal qual definida na Equação (2.16).

A obtenção da distribuição de Nakagami- $m$  não se dá de maneira direta e simples [1]. Para tal todas as variáveis gaussianas ( $x_i$  e  $y_i$ ) apresentam variâncias

idênticas e o modelo de desvanecimento torna-se o de Nakagami, proporcionando assim, a obtenção da distribuição de Nakagami- $m$ . A distribuição de Nakagami- $m$  pode ser obtida, de acordo com [1], de maneira exata a partir da distribuição  $\eta - \mu$  ajustando-se os parâmetros  $\eta$  e  $\mu$  para os seguintes valores:

- $\eta \rightarrow 0$  (ou, de modo equivalente,  $\eta \rightarrow \infty$ ) e  $\mu = m$  :

Neste caso faz-se uso da aproximação indicada pela Equação (3.43). Então, fazendo  $\eta = 0$  e  $\mu = m$  na Equação (3.43) tem-se:

$$p(\rho) \approx \frac{2\mu^\mu}{\Gamma(\mu)} \left( \frac{1+0}{1-0} \right)^\mu \rho^{2\mu-1} \exp[-\mu\rho^2(0+1)]$$

$$p(\rho) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)} \rho^{2m-1} \exp(-m\rho^2), \quad \rho \geq 0,$$

que é fdp de Nakagami- $m$  normalizada em relação ao valor rms tal qual definida na Equação (2.26).

- $\eta \rightarrow 1$  e  $\mu = \frac{m}{2}$  :

Neste caso faz-se uso da aproximação indicada pela Equação (3.51). Então, fazendo  $\eta = 1$  e  $\mu = \frac{m}{2}$  na Equação (3.51) tem-se:

$$p(\rho) \approx \frac{2(2\mu)^{2\mu}}{\Gamma(2\mu)} \rho^{2(2\mu)-1} \left[ \frac{(1+1)^2}{4 \cdot 1} \right]^\mu \exp \left[ -2\mu \frac{(1+1)^2}{4 \cdot 1} \rho^2 \right]$$

$$p(\rho) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)} \rho^{2m-1} \exp(-m\rho^2), \quad \rho \geq 0,$$

que é fdp de Nakagami- $m$  normalizada em relação ao valor rms tal qual definida na Equação (2.26).

Verifica-se que a distribuição de Rayleigh pode ser obtida ainda a partir da distribuição de Nakagami- $m$ , ajustando-se o parâmetro  $m = 1$ . Nota-se ainda que a distribuição Semi-Gaussiana Positiva pode ser obtida fazendo-se  $\eta \rightarrow 0$  a partir da distribuição de Hoyt ou fazendo-se  $m = \frac{1}{2}$  a partir da distribuição de Nakagami- $m$ .

Foi observado experimentalmente por Nakagami [17] que:

$$\frac{E^2(r^2)}{\text{Var}(r^2)} \geq \frac{1}{2},$$

logo, para a distribuição  $\eta - \mu$  têm-se:

$$\mu \frac{(1+\eta)^2}{1+\eta^2} \geq \frac{1}{2}, \quad (3.61)$$

onde,  $0 \leq \eta \leq 1$  ou, de modo equivalente,  $1 \leq \eta < \infty$ .

É importante notar que, devido à sua natureza experimental, a Equação (3.61) não precisa, necessariamente, ser observada. De fato, a distribuição  $\eta - \mu$  pode ser utilizada para  $\mu$  assumindo quaisquer valor real  $\mu \geq 0$  e para  $0 \leq \eta \leq 1$ .

## 3.11 Conclusão

Foi apresentada neste capítulo a distribuição  $\eta - \mu$  e o ambiente que ela descreve. A distribuição  $\eta - \mu$  engloba as distribuições Semi-Gaussiana Positiva, de Rayleigh, de Hoyt e a distribuição de Nakagami- $m$  como casos especiais, possibilitando a obtenção das mesmas de maneira exata. O parâmetro  $\eta$  pode tornar-se, em um caso particular, o parâmetro  $q$  da distribuição de Hoyt. O parâmetro  $\mu$ , por sua vez, pode se tornar, em um caso particular, o parâmetro  $m$  da distribuição de Nakagami- $m$ .

Por isso, a distribuição  $\eta - \mu$  pode ser utilizada para melhor representar as variações de curto prazo do sinal recebido com desvanecimento. A distribuição  $\eta - \mu$  permite a variação de dois parâmetros de desvanecimento ( $\eta$  e  $\mu$ ), provendo desta forma, um maior grau de liberdade que as distribuições citadas no parágrafo anterior.

É apresentado no Anexo B um sumário matemático contendo as principais equações para a distribuição  $\eta - \mu$  apresentadas neste capítulo e nos capítulos vindouros, bem como, é exibido um organograma que relaciona a distribuição  $\eta - \mu$  com seus casos especiais, ou seja, com as distribuições Hoyt, Nakagami- $m$ , Rayleigh e Semi-Gaussiana Positiva.

# Capítulo 4

## Análise de Desempenho em um Canal $\eta - \mu$

### 4.1 Introdução

O projeto de qualquer sistema de comunicação digital inicia-se com a descrição do canal (potência recebida, banda disponível e estatísticas do ruído, dentre outras características) e com a definição das necessidades do sistema, tais como taxa de dados e desempenho de erro. Tendo a descrição do canal, necessita-se determinar os parâmetros que satisfaçam, da melhor forma, as necessidades do projeto e as exigências quanto ao desempenho.

Assim, conforme [20] e [31], o projetista deve considerar a relação de compromisso que surge ao buscar-se atender um ou mais dos seguintes critérios:

- Maximizar a taxa de transmissão de bit;
- Minimizar a probabilidade de erro de bit;
- Minimizar a potência de transmissão necessária;
- Minimizar a banda necessária;
- Maximizar a confiabilidade, ou,
- Minimizar a complexidade do sistema com o objetivo de diminuir o custo.

Neste capítulo, examinar-se-á a probabilidade de erro média relacionada com a relação SNR, sendo esta diretamente proporcional à potência de transmissão. Ainda, será tratada a probabilidade de erro de bit em canais lentos e não seletivos em frequência, ou seja, planos. O canal em estudo é modelado de acordo com a

distribuição  $\eta - \mu$  descrito no capítulo 3. A análise será feita para modulações binárias (BPSK, BFSK coerente, BFSK não coerente e DPSK) e quaternárias (QPSK, OQPSK e  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK).

## 4.2 Probabilidade de Erro Média para o Canal

### $\eta - \mu$

Como visto na seção 2.3, a análise de desempenho deve ser feita consoante a integral descrita pela Equação (2.31), reproduzida abaixo:

$$P_e = \int_0^{\infty} P(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b, \quad (4.1)$$

onde,  $P(\gamma_b)$  está definida na Tabela 2.1 para os diferentes tipos de modulações considerados neste estudo. Sendo ainda que  $p(\gamma_b)$  é a fdp para o canal  $\eta - \mu$  como uma função da relação SNR recebida, que é a Equação (3.39) aqui reproduzida:

$$p(\gamma_b) = \frac{2\sqrt{\pi}h^\mu}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{\mu}{\gamma_b}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (4.2)$$

Substituindo as expressões da Tabela 2.1 e a Equação (4.2) na Equação (4.1), encontra-se as seguintes integrais para o cálculo da probabilidade de erro média para cada tipo de modulação:

### BPSK - QPSK - OQPSK

$$P_e = \int_0^{\infty} Q(\sqrt{2\gamma_b}) \frac{2\sqrt{\pi}h^\mu}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{\mu}{\gamma_b}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) \times \\ \times I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) d\gamma_b \quad (4.3)$$

### BFSK coerente

$$P_e = \int_0^{\infty} Q(\sqrt{\gamma_b}) \frac{2\sqrt{\pi}h^\mu}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{\mu}{\gamma_b}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) \times \\ \times I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) d\gamma_b \quad (4.4)$$

**BFSK não coerente**

$$P_e = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma_b}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi} h^\mu}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{\mu}{\gamma_b}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h \frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) \times \\ \times I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) d\gamma_b \quad (4.5)$$

**DPSK**

$$P_e = \int_0^\infty \exp(-\gamma_b) \frac{\sqrt{\pi} h^\mu}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{\mu}{\gamma_b}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h \frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) \times \\ \times I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) d\gamma_b \quad (4.6)$$

 **$\frac{\pi}{4}$ -DQPSK**

$$P_e = \int_0^\infty Q\left[\sqrt{4\gamma_b} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)\right] \frac{2\sqrt{\pi} h^\mu}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{\mu}{\gamma_b}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp\left(-2\mu h \frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) d\gamma_b \quad (4.7)$$

As integrais (4.3) a (4.7) são calculadas numericamente\*, já que não foi possível obter expressões na forma fechada para as mesmas. As curvas de probabilidade de erro média são apresentadas nas Figuras 4.1 a 4.20. As curvas das Figuras 4.1, 4.5, 4.9, 4.13 e 4.17 foram obtidas a partir dos parâmetros descritos pela Tabela 3.2 ( $m = 0, 75$ ) da Seção 3.4, aqui reproduzida pela Tabela 4.1. Já as curvas das Figuras 4.2, 4.6, 4.10, 4.14 e 4.18 foram obtidas a partir dos parâmetros descritos Tabela 3.2 ( $m = 1, 5$ ) da Seção 3.4, aqui reproduzida pela Tabela 4.2.

Na Tabela 4.3 estão expostos os valores dos parâmetros utilizados na obtenção das curvas das Figuras 4.3, 4.7, 4.11, 4.15 e 4.19. Por fim, na Tabela 4.4 estão os valores dos parâmetros utilizados na obtenção das curvas das Figuras 4.4, 4.8, 4.16 e 4.20.

---

\*Neste estudo utilizou-se o *software* Mathcad® 2001 Professional para executar tais cálculos e para plotar as respectivas curvas de probabilidade de erro média.



**Tabela 4.1:** Valores de  $\eta$  e  $\mu$  para  $m = 0,75$ ; calculados a partir da Equação (3.55)

$m = 0,75$								
Curva	A	B	C	D	E	F	G	H
$\eta$	0	0,005	0,026	0,055	0,127	0,225	0,382	1
$\mu$	0,75	0,743	0,713	0,676	0,6	0,525	0,45	0,375

**Tabela 4.2:** Valores de  $\eta$  e  $\mu$  para  $m = 1,5$ ; calculados a partir da Equação (3.55)

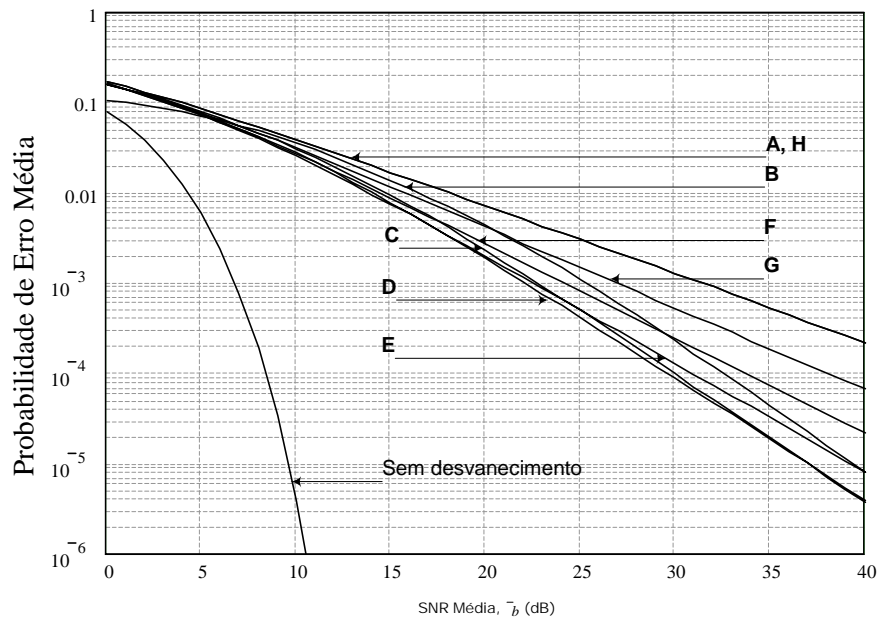
$m = 1,5$								
Curva	I	J	K	L	M	N	O	P
$\eta$	0	0,005	0,026	0,055	0,127	0,225	0,382	1
$\mu$	1,5	1,485	1,426	1,352	1,2	1,05	0,9	0,75

**Tabela 4.3:** Valores de  $\eta$  e  $\mu$  escolhidos de forma arbitrária para as Figuras 4.3, 4.7, 4.11, 4.15 e 4.19

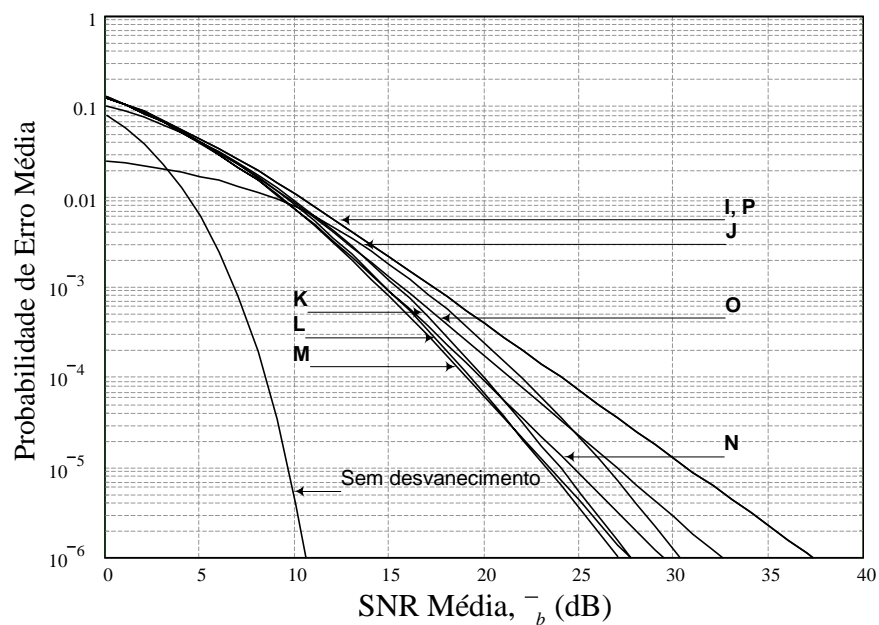
Curva	a	b	c	d	e	f	g	h
$\eta$	0,25	1	0	0	0	0,06	0,06	0,06
$\mu$	0,5	0,5	0,5	1	2	0,001	0,2	0,23

**Tabela 4.4:** Valores de  $\eta$  e  $\mu$  escolhidos de forma arbitrária para as Figuras 4.4, 4.8, 4.12, 4.16 e 4.20

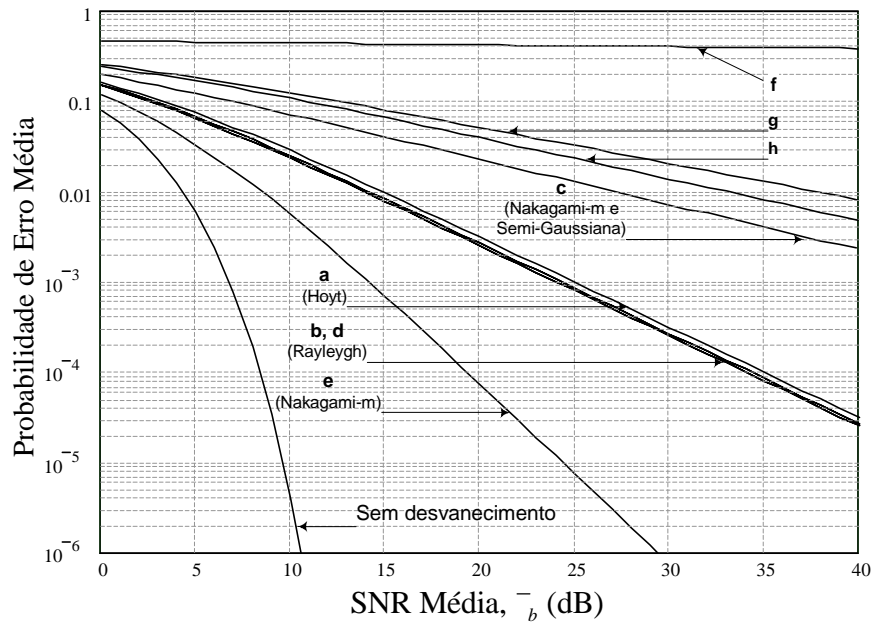
$\eta = 0,06$								
Curva	i	j	k	l	m	n	o	p
$\mu$	0,3	0,5	0,8	1	1,2	1,4	2	4



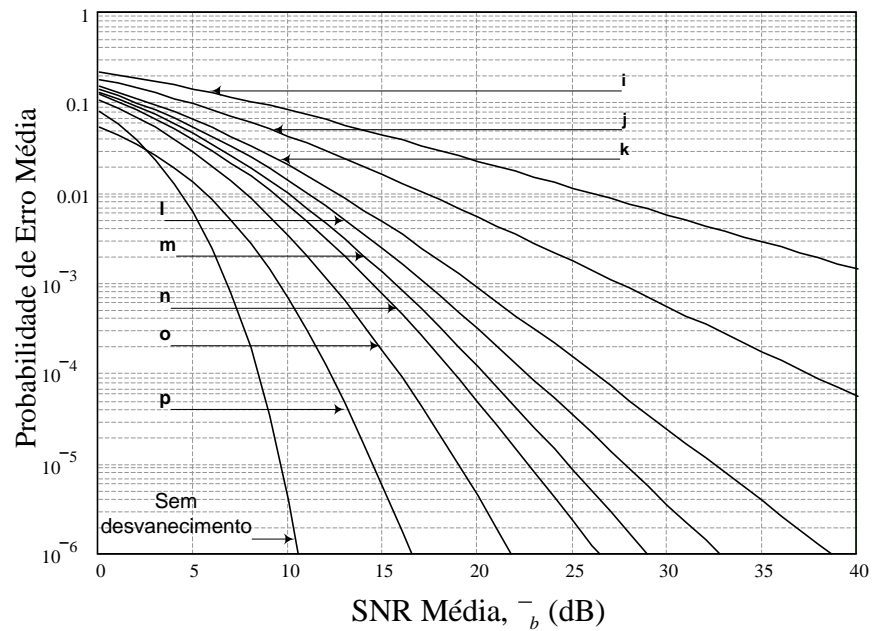
**Figura 4.1:** Probabilidade de erro média para a modulação BFSK coerente (para  $m=0,75$ ) com desvanecimento  $\eta - \mu$



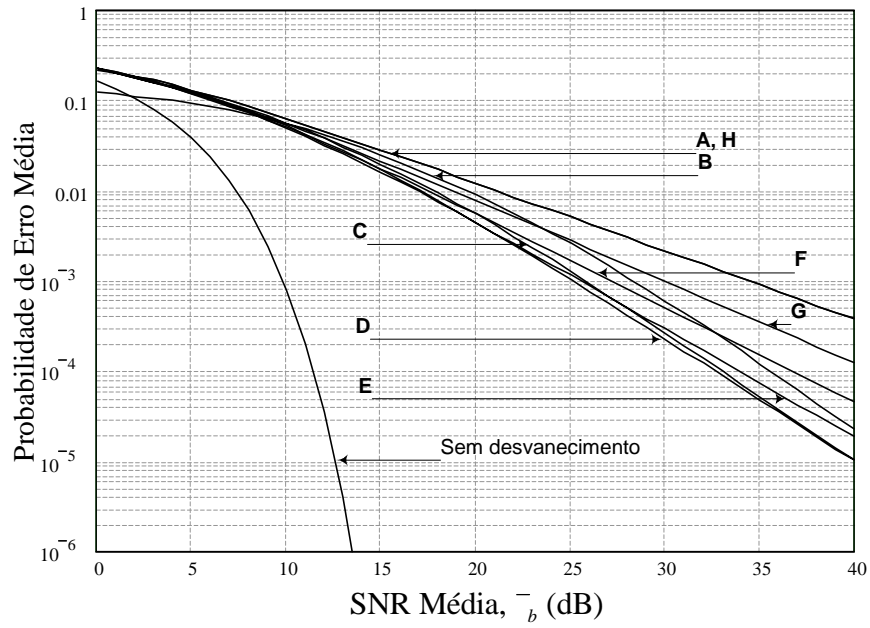
**Figura 4.2:** Probabilidade de erro média para modulações BPSK, QPSK e OQPSK para  $m=1,5$  com desvanecimento  $\eta - \mu$



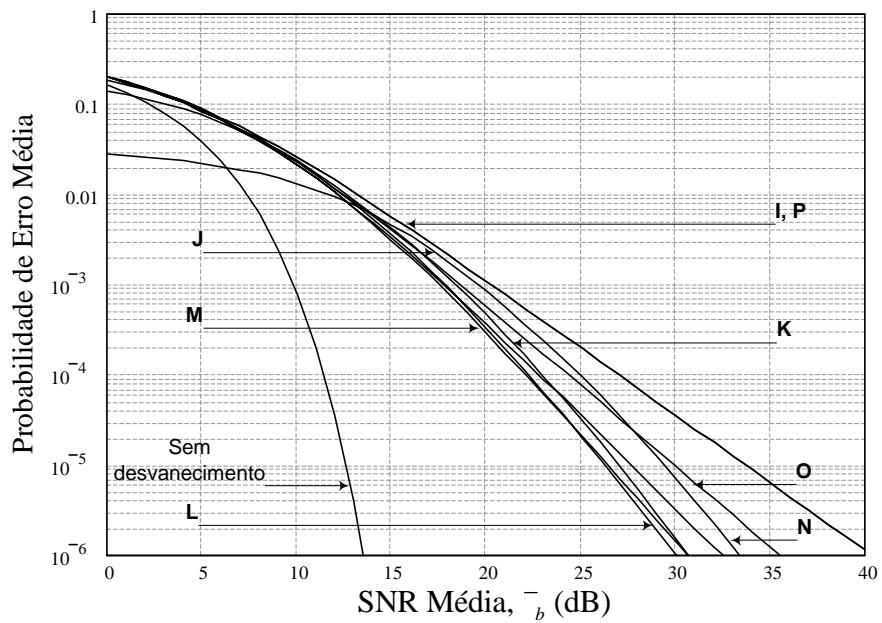
**Figura 4.3:** Probabilidade de erro média para modulações BPSK, QPSK e OQPSK para os valores da Tabela 4.3, com desvanecimento  $\eta - \mu$



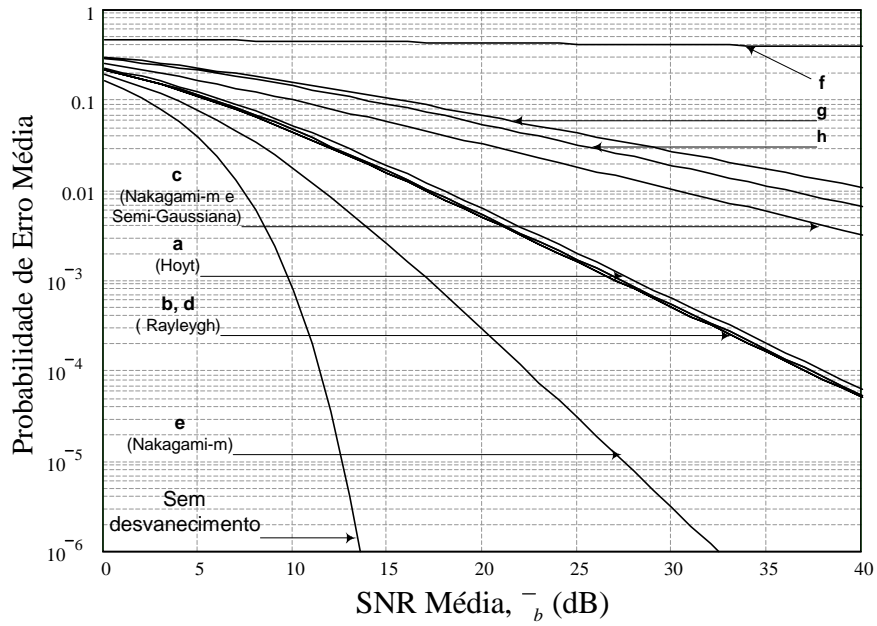
**Figura 4.4:** Probabilidade de erro média para modulações BPSK, QPSK e OQPSK para os valores da Tabela 4.4, com desvanecimento  $\eta - \mu$



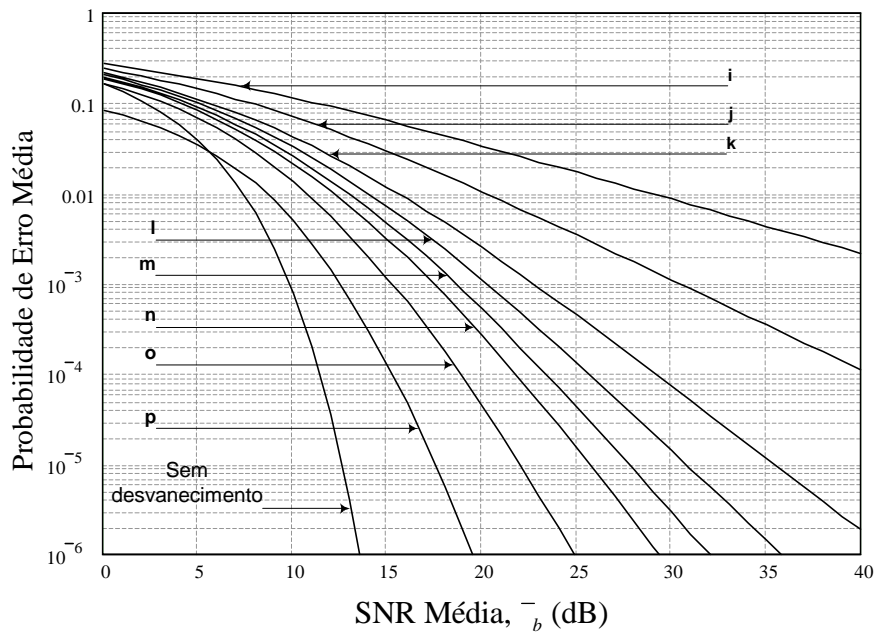
**Figura 4.5:** Probabilidade de erro média para a modulação BFSK coerente (para  $m=0,75$ ) com desvanecimento  $\eta - \mu$



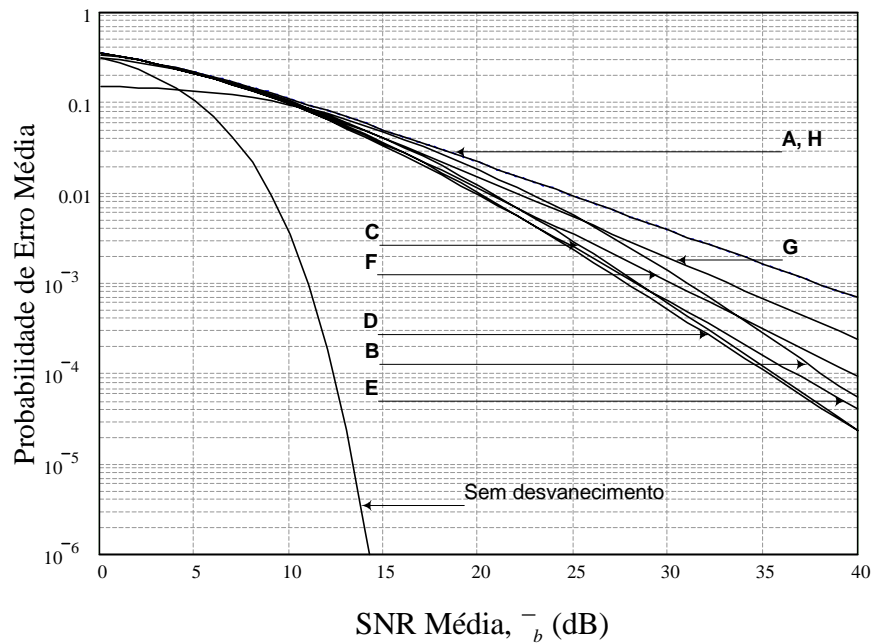
**Figura 4.6:** Probabilidade de erro média para modulação BFSK coerente (para  $m=1,5$ ) com desvanecimento  $\eta - \mu$



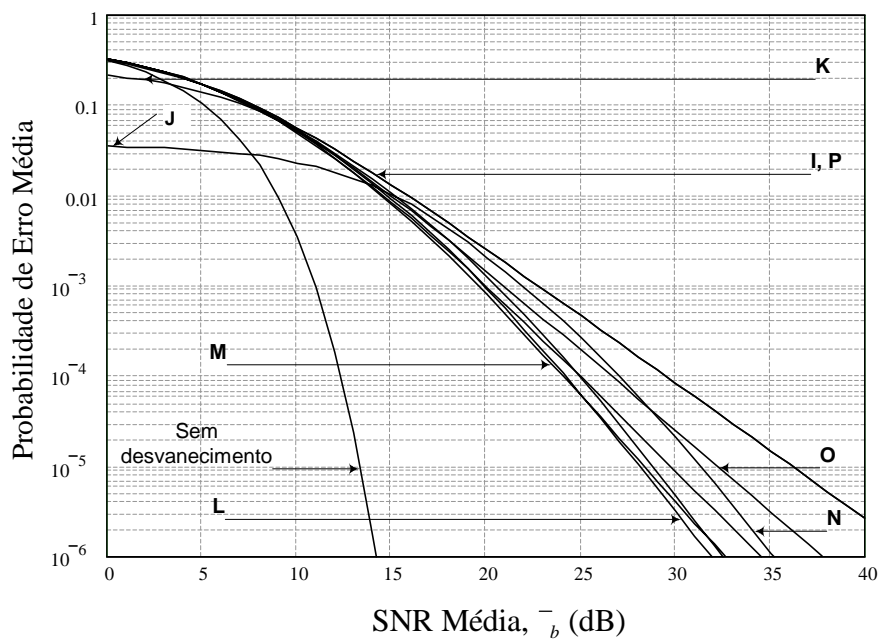
**Figura 4.7:** Probabilidade de erro média para modulação BFSK coerente para os valores da Tabela 4.3, com desvanecimento  $\eta - \mu$



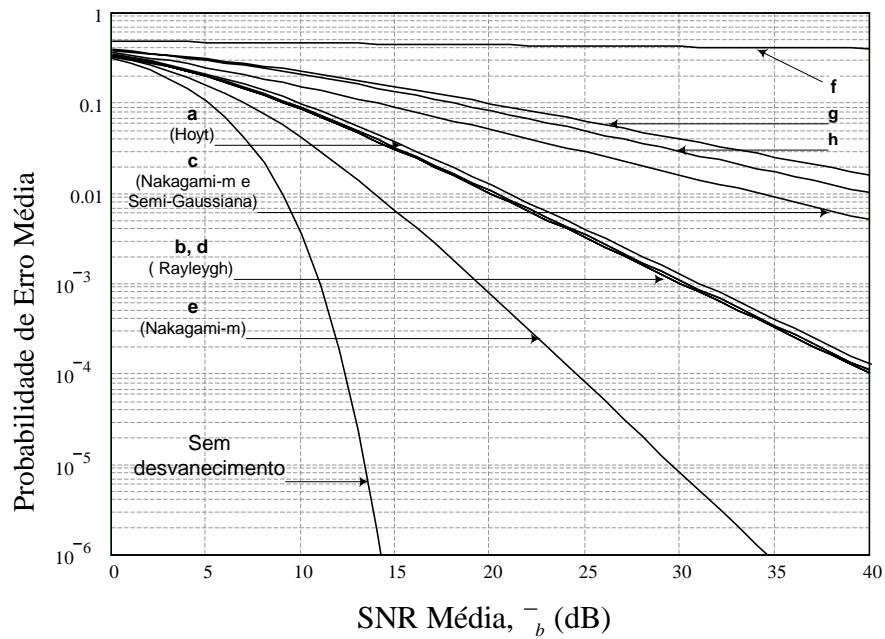
**Figura 4.8:** Probabilidade de erro média para modulação BFSK coerente para os valores da Tabela 4.4, com desvanecimento  $\eta - \mu$



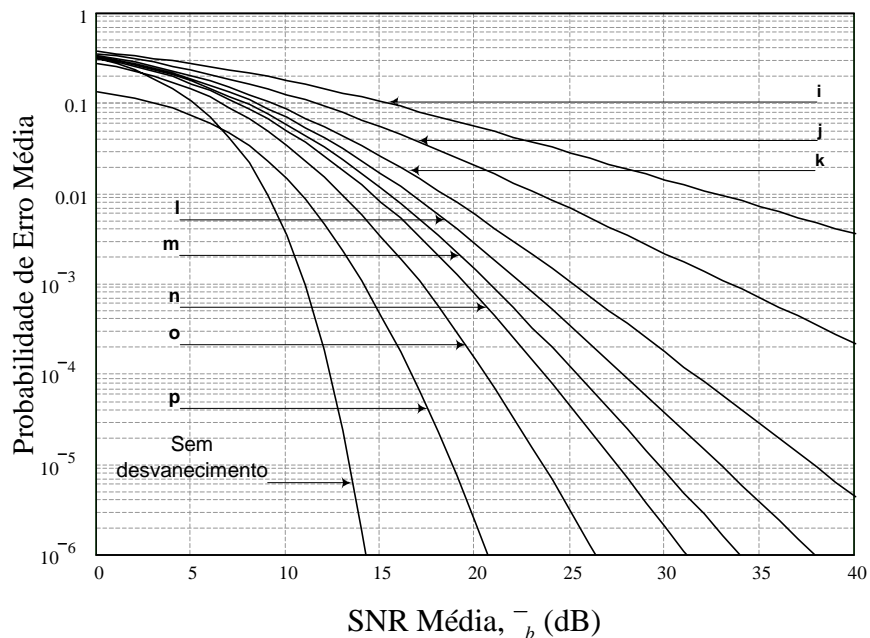
**Figura 4.9:** Probabilidade de erro média para a modulação BFSK não coerente (para  $m=0,75$ ) com desvanecimento  $\eta - \mu$



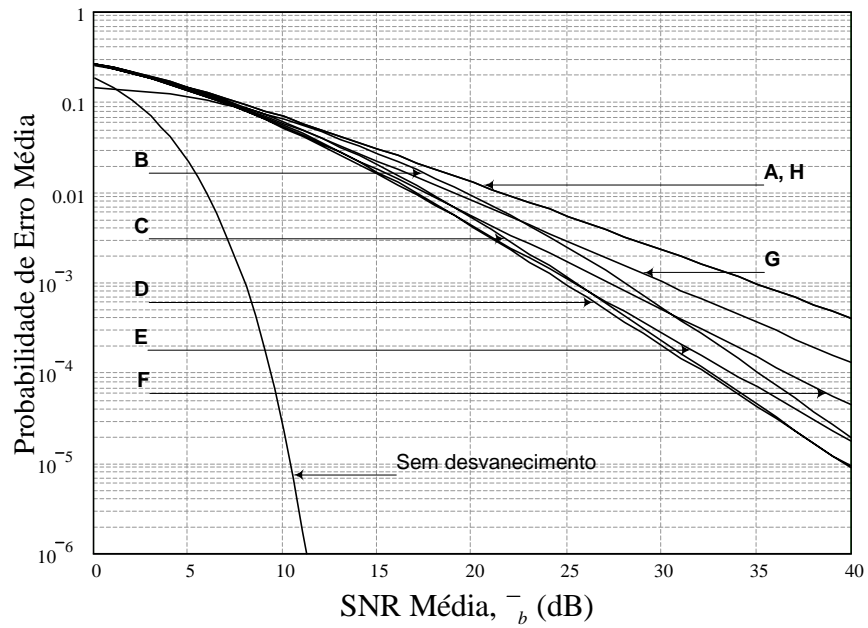
**Figura 4.10:** Probabilidade de erro média para modulação BFSK não coerente (para  $m=1,5$ ) com desvanecimento  $\eta - \mu$



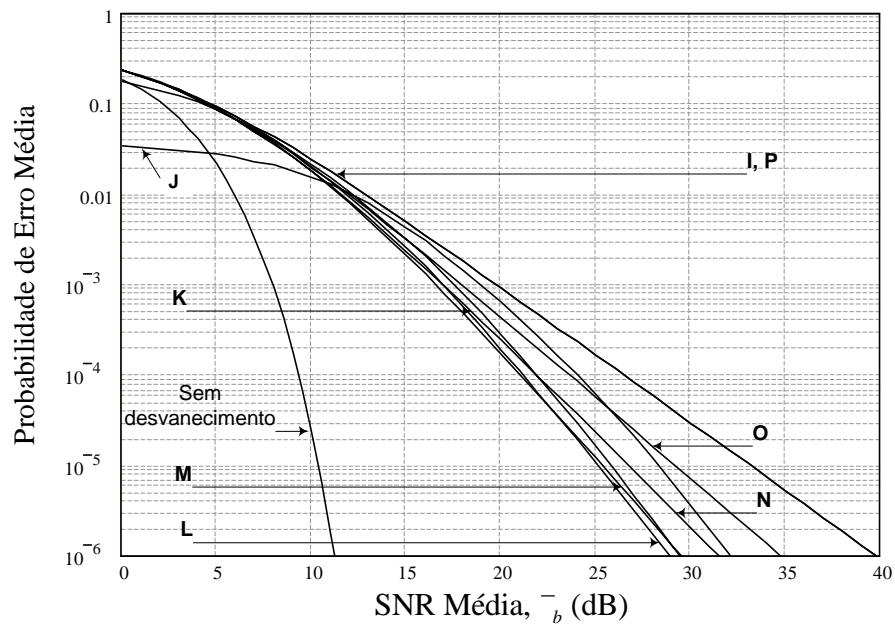
**Figura 4.11:** Probabilidade de erro média para modulação BFSK não coerente para os valores da Tabela 4.3, com desvanecimento  $\eta - \mu$



**Figura 4.12:** Probabilidade de erro média para modulação BFSK não coerente para os valores da Tabela 4.4, com desvanecimento  $\eta - \mu$

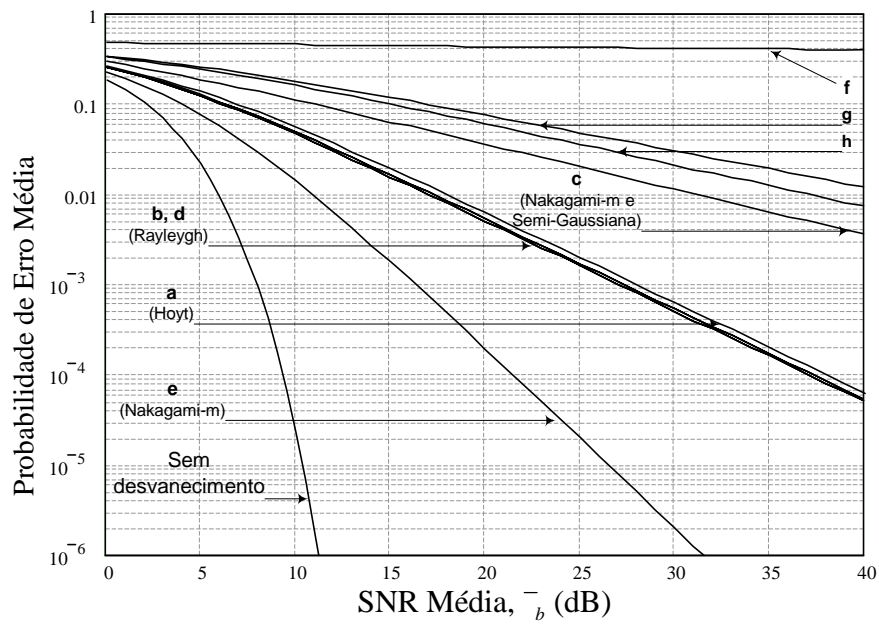


**Figura 4.13:** Probabilidade de erro média para modulação DPSK (para  $m=0,75$ ) com desvanecimento  $\eta - \mu$

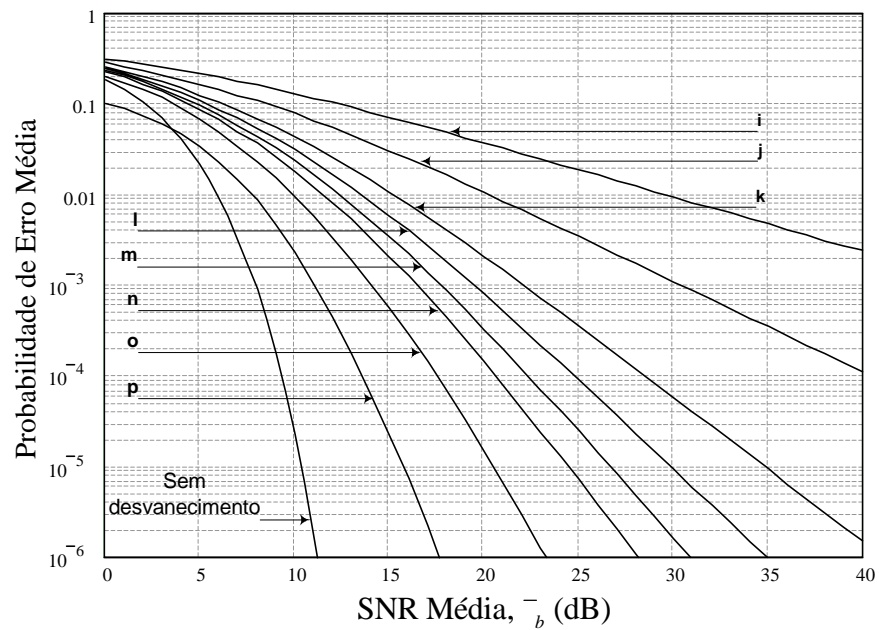


**Figura 4.14:** Probabilidade de erro média para modulação DPSK (para  $m=1,5$ ) com desvanecimento  $\eta - \mu$

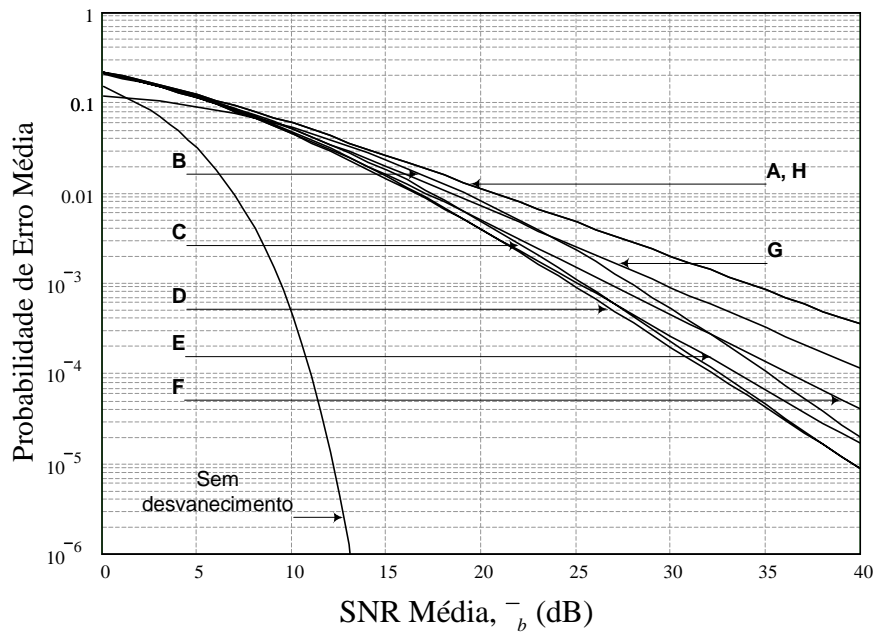




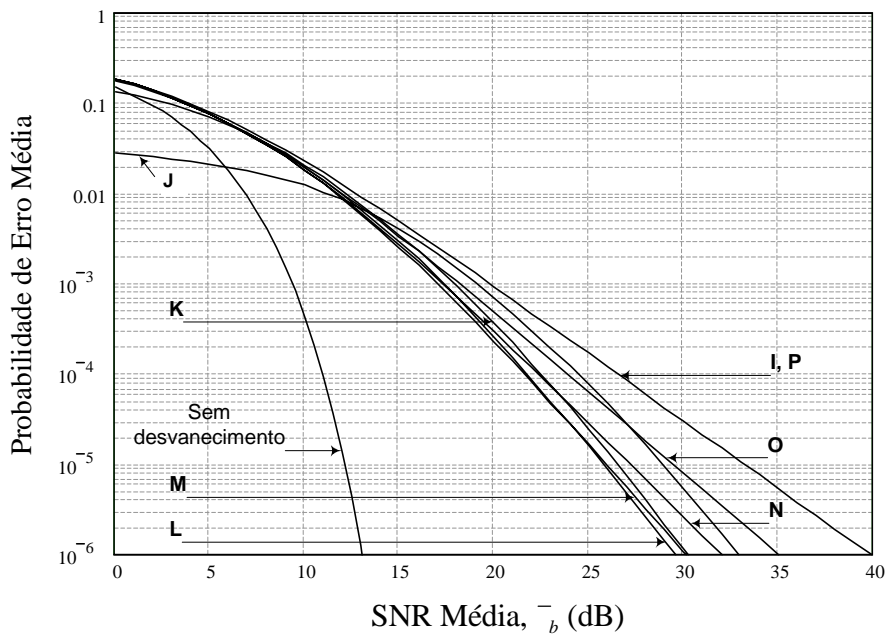
**Figura 4.15:** Probabilidade de erro média para modulação DPSK para os valores da Tabela 4.3, com desvanecimento  $\eta - \mu$



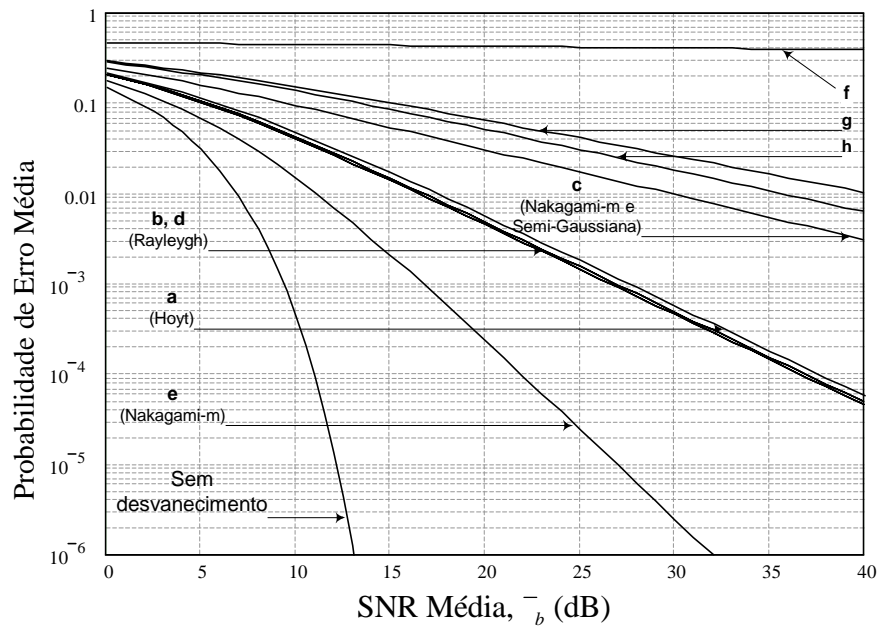
**Figura 4.16:** Probabilidade de erro média para modulação DPSK para os valores da Tabela 4.4, com desvanecimento  $\eta - \mu$



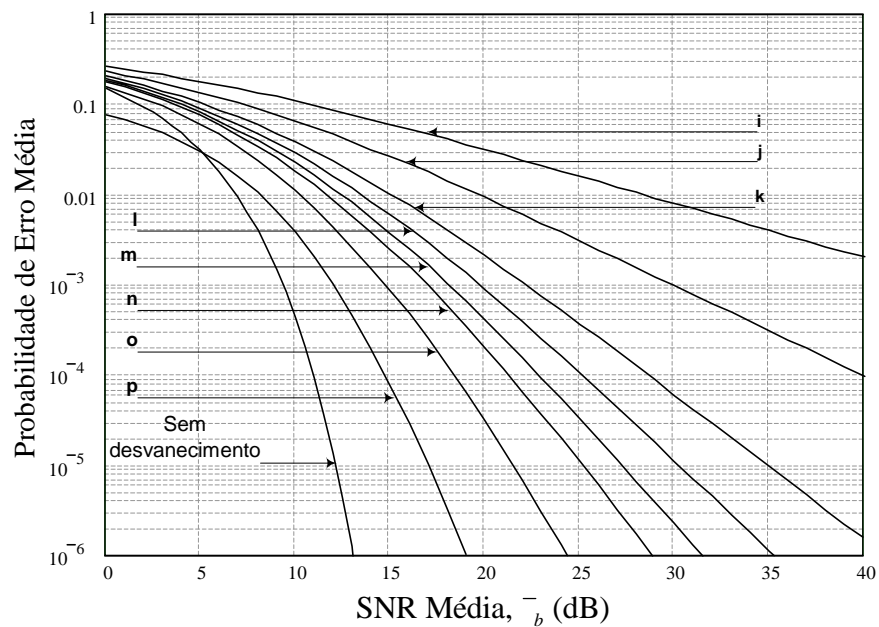
**Figura 4.17:** Probabilidade de erro média para modulação  $\pi/4$ -DQPSK (para  $m=0,75$ ) com desvanecimento  $\eta - \mu$



**Figura 4.18:** Probabilidade de erro média para modulação  $\pi/4$ -DQPSK (para  $m=1,5$ ) com desvanecimento  $\eta - \mu$



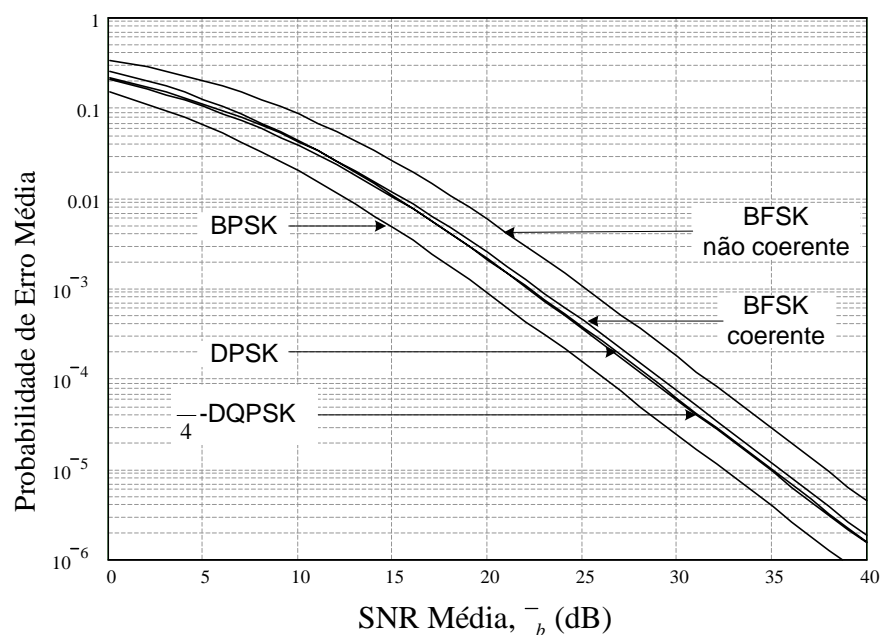
**Figura 4.19:** Probabilidade de erro média para modulação  $\pi/4$ -DQPSK para os valores da Tabela 4.3, com desvanecimento  $\eta - \mu$



**Figura 4.20:** Probabilidade de erro média para modulação  $\pi/4$ -DQPSK para os valores da Tabela 4.4, com desvanecimento  $\eta - \mu$

### 4.3 Conclusão

A Figura 4.21 mostra que, em termos de probabilidade de erro de bit, para um ambiente  $\eta - \mu$ , as modulações BPSK, QPSK e OQPSK apresentam um melhor desempenho do que as outras modulações consideradas neste estudo. A modulação QPSK, a qual é adotada no padrão IS-95A (*Interim Standard 95 revision A*)(*CdmaOne - Code Division Multiplex Access*), apresenta um melhor desempenho, por volta de 2,5dB, se comparada com a modulação  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK, a qual é utilizada no padrão IS-136(*Interim Standard 136*)(*US TDMA - Time Division Multiplex Access*).



**Figura 4.21:** Comparação entre a probabilidade de erro média para as modulações BPSK, BFSK coerente, BFSK não coerente, DPSK e  $\frac{\pi}{4}$ -DQPSK, para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,8$

Comparando-se as curvas das Figuras 4.11 e 4.15 com as Figuras 2.10-(a) e 2.10-(b), respectivamente, observa-se que o desempenho apresentado nas curvas (a) (para  $\eta = 0,25$  e  $\mu = 0,5$ ), das Figuras 4.11 e 4.15 é o mesmo que o desempenho obtido nas curvas das Figuras 2.10-(a) e 2.10-(b) para  $q = 0,5$ . Este fato corrobora com a afirmação, feita e comprovada matematicamente na Seção 3.10, de que a distribuição de Hoyt pode ser obtida de modo exato pela distribuição  $\eta - \mu$ , ao se ajustar o parâmetro  $\mu = \frac{1}{2}$  e o parâmetro  $\eta = q^2$ .

Outra afirmação que é comprovada graficamente neste capítulo, é a de que a distribuição  $\eta - \mu$  aproxima-se de forma exata a distribuição de Nakagami- $m$ , como visto na Seção 3.10. Tal comprovação se dá por intermédio da comparação

das curvas (e) ( $\eta \rightarrow 0$ ,  $\mu = m = 2$ ) das Figuras 4.11 e 4.15 com as Figuras 2.11-(a) e 2.11-(b). E ainda, verifica-se através da comparação das curvas (b) ( $\eta \rightarrow 1$  e  $\mu = 0,5$ , ou,  $\mu = 0,5$  e  $q = 1$ ) e (d) ( $\eta \rightarrow 0$  e  $\mu = 1$ ) das Figuras 4.3, 4.7, 4.11, 4.15 e 4.19, com as curvas apresentadas na Figura 2.8, que a distribuição de Rayleigh também é obtida de forma exata a partir da distribuição  $\eta - \mu$ , e mais, comprova-se que a distribuição de Rayleigh é um caso especial das distribuições de Hoyt e de Nakagami- $m$ .

E completando as corroborações acerca da Seção 3.10, verifica-se que as curvas (c) ( $\eta \rightarrow 0$  e  $\mu = m = 0,5$ , ou,  $q \rightarrow 0$  e  $\mu = 0,5$ ) das Figuras 4.11 e 4.15 são as mesmas obtidas nas Figuras 2.11-(a) e 2.11-(b), ou seja, é comprovado que a distribuição Semi-Gaussiana Positiva pode ser obtida de modo exato a partir da distribuição  $\eta - \mu$ . E além disto, comprova-se que a distribuição Semi-Gaussiana Positiva é, também, um caso especial das distribuições de Hoyt e de Nakagami- $m$ .

Analisando-se as curvas (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l), (m), (n), (o) e (p) das Figuras 4.3, 4.4, 4.7, 4.8, 4.11, 4.12, 4.15, 4.16, 4.19 e 4.20, verifica-se que a distribuição  $\eta - \mu$  modela um canal partindo da curva de desempenho de um canal sem desvanecimento ( $\mu \rightarrow \infty$ ) e indo em direção a situações de desvanecimento mais severo ( $\mu \rightarrow 0$ ).

Neste capítulo foi realizada uma análise da probabilidade de erro média para canais modelados pela distribuição  $\eta - \mu$ . Os canais foram considerados lentos e não seletivos em frequência. Sua proposta encontrar equações fechadas para a probabilidade de erro média considerando-se as modulações estudadas. Uma vez que não foi possível a obtenção destas equações na forma fechada, calculou-se numericamente (adotando-se alguns valores para os parâmetros  $\eta$  e  $\mu$ ) as integrais que descrevem a probabilidade de erro média para as modulações consideradas neste estudo.

Foi verificado, por intermédio da análise de curvas de desempenho, que, como apresentado no Capítulo 3, a distribuição  $\eta - \mu$  aproxima de forma exata as distribuições de Rayleigh, Hoyt e Nakagami- $m$ .

# Capítulo 5

## Canal $\eta - \mu$ com Diversidade

### 5.1 Introdução

Pode-se utilizar a propagação por múltiplos percursos para combater seus efeitos nocivos ao sinal transmitido como dito no capítulo introdutório. A técnica da diversidade aproveita os próprios múltiplos percursos de forma a minimizar os efeitos do desvanecimento no sinal resultante recebido.

Em linhas gerais, a técnica da diversidade consiste em receber redundantemente a mesma informação por  $L$  múltiplos percursos (ou canais com desvanecimento) mutuamente independentes. Estas réplicas são combinadas segundo um critério específico para melhorar a relação SNR do sinal utilizado na decisão. A diversidade explora a natureza da rádio propagação, ou seja, explora-se o fato da probabilidade de ocorrência simultânea de desvanecimento profundo em todos os  $L$  canais (ou braços) de diversidade ser diminuta ([2] e [32]). Para que se entenda o mecanismo, assumamos que  $p$  seja a probabilidade da relação SNR instantânea de uma das réplicas do sinal estar abaixo de um determinado valor crítico. Então,  $p^L$  será a probabilidade de que todas as  $L$  réplicas independentes dos sinais desvanecidos possuam SNR instantânea abaixo do valor crítico determinado, sendo que  $p^L \leq p$ .

Existem vários métodos para se fornecer ao receptor réplicas do mesmo sinal, ou seja, de se obter diversidade ([2], [18] e [33]). Dentre eles, podem-se destacar:

**Diversidade Angular (ou Direcional):** Requer várias antenas direcionais.

Cada antena seleciona um plano de recepção para as ondas com um pequeno espalhamento do ângulo de chegada, assim, vários braços de diversidade decorrelacionados são obtidos;

**Diversidade por Polarização:** Explora a propriedade do ambiente de espalhamento proporcionar ao receptor um grande número de ondas com ampli-

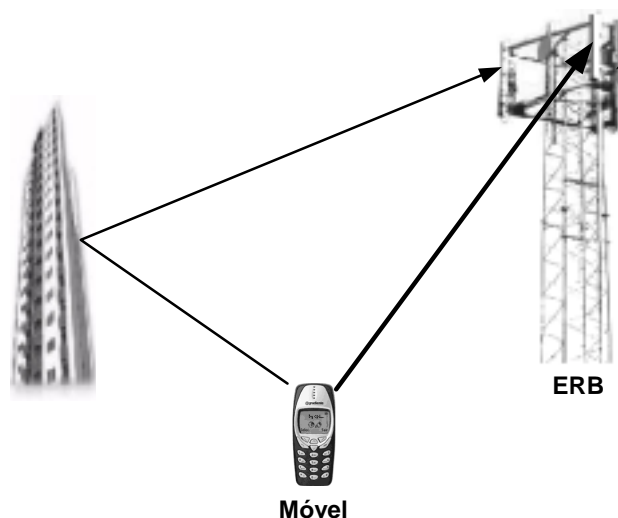
tudes e fases que variam aleatoriamente. As antenas receptoras possuem diferentes polarizações de modo a obter braços de diversidade decorrelacionados.

**Diversidade em Frequência:** Utiliza-se  $L$  diferentes portadoras para transmitir a mesma informação. As portadoras são separadas por no mínimo ao equivalente à banda de coerência do canal.

**Diversidade Temporal:** é obtida transmitindo-se a mesma informação em  $L$  diferentes instantes de tempo, separados por um intervalo igual ou maior que o tempo de coerência do canal.

**Diversidade Espacial:** é a utilização de múltiplas antenas. O uso de múltiplas antenas receptoras é a técnica precursora de todas as outras técnicas de diversidade [4]. Um exemplo de sua aplicação é o uso de uma antena transmissora e várias antenas receptoras, sendo que a distância entre as antenas receptoras deve ser tal que as diferentes componentes resultantes dos múltiplos precursos sejam estatisticamente independentes e decorrelacionadas. A distância entre as antenas receptoras depende de uma série de fatores, como o ambiente de propagação e a localização das antenas dentre outros fatores [4].

A Figura 5.1 ilustra a técnica de diversidade espacial, onde chega ao receptor dois braços de diversidade com a mesma informação. O receptor (representado pela Estação Rádio Base, ERB) irá optar pelo sinal mais forte.



**Figura 5.1:** Ilustração da técnica de diversidade

## 5.2 Desenvolvimento da Fdp da Distribuição de $\eta - \mu$ com Diversidade

Seja a relação SNR instantânea em um sistema com diversidade dado por:

$$\gamma_b = \frac{E_b}{N_0} \sum_{k=1}^L r_k^2,$$

onde,  $L$  indica o número de canais, ou braços de diversidade do sistema;  $k$  determina o  $k$ -ésimo canal e  $r_k$  é a envoltória do sinal distribuída de acordo com a distribuição  $\eta - \mu$ . Pode-se apresentar  $\gamma_b$  da seguinte forma simplificada:

$$\gamma_b = \sum_{k=1}^L \gamma_k,$$

onde  $\gamma_k$  é o valor instantâneo da relação SNR do  $k$ -ésimo canal.

Deve-se então determinar-se a função densidade de probabilidade de  $\eta - \mu$  em relação à SNR instantânea  $\gamma_b$ , dada por  $p(\gamma_b)$ . Uma vez que os  $L$  canais são descorrelacionados e estão em um ambiente  $\eta - \mu$ , as variáveis aleatórias podem ser consideradas independentes e identicamente distribuídas. Sendo assim, a obtenção de  $p(\gamma_b)$  pode dar-se aplicando-se a transformada de Laplace como mostra o Anexo A. Para  $L = 1$ ,  $\gamma_b = \gamma_1$  tem a fdp dada pela Equação (3.39) aqui reproduzida:

$$p(\gamma_1) = \frac{2\sqrt{\pi}h^\mu}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{\mu}{\gamma_1}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_1}{H}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H\frac{\gamma_1}{\gamma_1}\right), \quad \gamma_1 \geq 0 \quad (5.1)$$

A transformada de Laplace de  $p(\gamma_1)$  pode ser obtida com auxílio da diretiva [30](página 1025, equação 29.3.60) indicada pela Equação (5.2), e pela propriedade do deslocamento na frequência dada por [30](página 1021, equação 29.2.12), aqui indicada pela Equação (5.3).

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(a)} \left(\frac{t}{2b}\right)^{a-\frac{1}{2}} I_{a-\frac{1}{2}}(bt) \longleftrightarrow \frac{1}{(s^2 - b^2)^a}, \quad a > 0 \quad (5.2)$$

$$e^{at} F(t) \longleftrightarrow f(s - a), \quad (5.3)$$



onde  $s$  é a variável complexa de Laplace.

$$\mathcal{L}[p(\gamma_1)] = \left(\frac{2\mu}{\bar{\gamma}_c}\right)^{2\mu} \frac{h^\mu}{\left[\left(s + \frac{2\mu h}{\bar{\gamma}_c}\right)^2 - \left(\frac{2\mu H}{\bar{\gamma}_c}\right)^2\right]^\mu}, \quad (5.4)$$

onde  $\bar{\gamma}_c$  é a relação SNR média por canal, que é assumida sendo idêntica para todos os canais.

Desde que o desvanecimento nos  $L$  braços de diversidade são mutuamente independentes, as relações SNR  $\gamma_k$  são estatisticamente independentes. Desta forma, como mostra o Anexo A, a transformada de Laplace de  $p(\gamma_b)$  é o resultado da Equação (5.4) elevada à  $L$ -ésima potência.

$$\mathcal{L}[p(\gamma_b)] = \left(\frac{2\mu}{\bar{\gamma}_c}\right)^{2\mu L} \frac{h^{\mu L}}{\left[\left(s + \frac{2\mu h}{\bar{\gamma}_c}\right)^2 - \left(\frac{2\mu H}{\bar{\gamma}_c}\right)^2\right]^{\mu L}} \quad (5.5)$$

Calculando-se a transformada inversa de Laplace de  $\mathcal{L}[p(\gamma_b)]$ , obtém-se a fdp de  $\eta - \mu$  em função de  $\gamma_b$ , com  $L$  braços de diversidade, dada por:

$$p(\gamma_b) = \frac{2\sqrt{\pi}h^{\mu L}}{\Gamma(\mu L)} \left(\frac{\mu}{\bar{\gamma}_c}\right)^{\mu L + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu L - \frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h \frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_c}\right) \times \\ \times I_{\mu L - \frac{1}{2}}\left(2\mu H \frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_c}\right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (5.6)$$

Verifica-se que para  $L = 1$ , ou seja, sem diversidade, obtém-se a Equação (3.39), como esperado.

### 5.2.1 A Distribuição $\eta - \mu$ para $\eta \rightarrow 0$

A fdp da distribuição  $\eta - \mu$  com diversidade em função da relação SNR média é dada pela Equação (5.6). Onde o argumento da função de Bessel é:

$$z = 2\mu H \frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_c}, \quad \gamma_b \geq 0 \quad (5.7)$$

Como visto na Seção 3.7, verifica-se que, quando  $\eta \rightarrow 0$ , o módulo do argumento da função de Bessel,  $|z|$ , assume valores elevados. De acordo com a Equação (3.41), quando o argumento da função de Bessel assume valores altos, é

válida a seguinte aproximação:

$$I_{\mu L - \frac{1}{2}} \left( 2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_c} \right) \approx \frac{\exp \left( 2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_c} \right)}{\sqrt{2\pi 2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_c}}}, \quad \gamma_b \geq 0 \quad (5.8)$$

Por fim, substituindo a Equação (5.8) na Equação (5.6), tem-se a seguinte aproximação para a fdp da distribuição  $\eta - \mu$  com diversidade em função da relação SNR média:

$$p(\gamma_b) \approx \left( \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right)^{\mu L} \frac{\mu^{\mu L}}{\Gamma(\mu L) \bar{\gamma}_c^{\mu L}} \gamma_b^{\mu L - 1} \exp \left[ -\mu(\eta + 1) \frac{\gamma_b}{\gamma_c} \right], \quad \gamma_b \geq 0 \quad (5.9)$$

Nota-se que para  $L = 1$ , a Equação (5.9) reduz-se para o caso sem o uso da técnica de diversidade (Equação (3.46)).

### 5.2.2 A Distribuição $\eta - \mu$ para $\eta \rightarrow 1$

Verificou-se na Seção 3.8 que quando  $\eta \rightarrow 1$  o argumento da função de Bessel, dado pela Equação (5.7), tende a zero, sendo então válida a seguinte aproximação:

$$I_{\mu L - \frac{1}{2}} \left( 2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_c} \right) \approx \left( \mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_c} \right)^{\mu L - \frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\mu L + \frac{1}{2})}, \quad \gamma_b \geq 0 \quad (5.10)$$

Considerando-se a aproximação descrita pela Equação (5.10) e a Equação (3.50), a fdp da distribuição  $\eta - \mu$  com diversidade em função da relação SNR média pode ser aproximada por:

$$p(\gamma_b) \approx \frac{(2\mu)^{2\mu L} \bar{\gamma}_b^{2\mu L - 1}}{\Gamma(2\mu L) \bar{\gamma}_c^{2\mu L}} \left[ \frac{(1 + \eta)^2}{4\eta} \right]^{\mu L} \exp \left[ -2\mu \frac{(1 + \eta)^2}{4\eta} \frac{\gamma_b}{\gamma_c} \right], \quad \gamma_b \geq 0 \quad (5.11)$$

Novamente, nota-se que para  $L = 1$ , a Equação (5.11) reduz-se para o caso sem o uso da técnica de diversidade (Equação (3.53)).

A seguir será realizada uma análise de desempenho do canal  $\eta - \mu$  com diversidade, baseada na chamada combinação de máxima razão, MRC.

## 5.3 Análise de Desempenho utilizando Técnica de Diversidade

Este estudo visa a análise de desempenho utilizando técnicas de diversidade baseada em um canal  $\eta - \mu$  lento e não seletivo em frequência para as modulações binárias BPSK, BFSK coerente, BFSK não coerente e DPSK, e para modulações quaternárias QPSK, OQPSK. Sendo ainda, um estudo baseado no método de combinação MRC.

Para obter-se a probabilidade de erro média condicional para cada tipo de modulação, deve-se avaliar a seguinte integral:

$$P_e = \int_0^{\infty} P(\gamma_b) p(\gamma_b) d\gamma_b, \quad (5.12)$$

onde  $P_e$  é a probabilidade de erro média de bit, ou símbolo, com  $L$  braços de diversidade. A fdp  $p(\gamma_b)$  é definida pela Equação (5.6) e a probabilidade condicional  $P(\gamma_b)$  está definida na Tabela 5.1 para os diversos tipos de modulações [12].

Substituindo as expressões da Tabela 5.1 e a Equação (5.6) na Equação (5.12), encontra-se as seguintes integrais para o cálculo da probabilidade de erro média para cada tipo de modulação:

### BPSK - QPSK - OQPSK

$$P_e = \int_0^{\infty} Q(\sqrt{2\gamma_b}) \frac{2\sqrt{\pi}h^{\mu L}}{\Gamma(\mu L)} \left(\frac{\mu}{\gamma_c}\right)^{\mu L + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu L - \frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h \frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right) \times \\ \times I_{\mu L - \frac{1}{2}}\left(2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right) d\gamma_b \quad (5.13)$$

### BFSK coerente

$$P_e = \int_0^{\infty} Q(\sqrt{\gamma_b}) \frac{2\sqrt{\pi}h^{\mu L}}{\Gamma(\mu L)} \left(\frac{\mu}{\gamma_c}\right)^{\mu L + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu L - \frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h \frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right) \times \\ \times I_{\mu L - \frac{1}{2}}\left(2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right) d\gamma_b \quad (5.14)$$

**BFSK não coerente**

$$P_e = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{2L-1} \exp\left(-\frac{\gamma_b}{2}\right) \sum_{k=0}^{L-1} \left[ \frac{\gamma_b^k}{2^k k!} \sum_{n=0}^{L-1-k} \binom{2L-1}{n} \right] \frac{2\sqrt{\pi}h^{\mu L}}{\Gamma(\mu L)} \times \\ \times \left(\frac{\mu}{\gamma_c}\right)^{\mu L + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu L - \frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h \frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right) I_{\mu L - \frac{1}{2}}\left(2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right) d\gamma_b \quad (5.15)$$

**DPSK**

$$P_e = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{2L-1} \exp(-\gamma_b) \sum_{k=0}^{L-1} \left[ \frac{\gamma_b^k}{k!} \sum_{n=0}^{L-1-k} \binom{2L-1}{n} \right] \frac{2\sqrt{\pi}h^{\mu L}}{\Gamma(\mu L)} \times \\ \times \left(\frac{\mu}{\gamma_c}\right)^{\mu L + \frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu L - \frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h \frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right) I_{\mu L - \frac{1}{2}}\left(2\mu H \frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right) d\gamma_b \quad (5.16)$$

**Tabela 5.1:** Probabilidade de erro média para diferentes tipos de modulação em um canal com diversidade e ruído AWGN

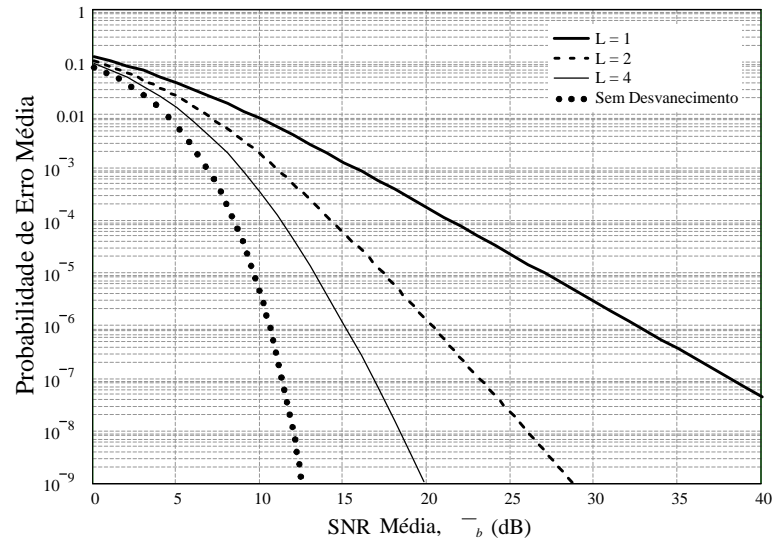
Modulação	$P(\gamma_b)$
BPSK, QPSK, OQPSK	$Q(\sqrt{2\gamma_b})$
BFSK coerente	$Q(\sqrt{\gamma_b})$
BFSK não coerente	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2L-1} \exp\left(-\frac{\gamma_b}{2}\right) \sum_{k=0}^{L-1} \left[ \frac{\gamma_b^k}{2^k k!} \sum_{n=0}^{L-1-k} \binom{2L-1}{n} \right]$
DPSK	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2L-1} \exp(-\gamma_b) \sum_{k=0}^{L-1} \left[ \frac{\gamma_b^k}{k!} \sum_{n=0}^{L-1-k} \binom{2L-1}{n} \right]$

As integrais (5.13) a (5.16) foram calculadas numericamente\*, já que não foi possível obter expressões na forma fechada para as mesmas. As curvas de probabilidade de erro média considerando-se L canais de diversidade, para os diversos tipos de modulações, são apresentadas nas Figuras 5.2, 5.4, 5.6 e 5.8 (obtidas para  $\eta = 0,382$  e  $\mu = 0,9$ ) e nas Figuras 5.3, 5.5, 5.7 e 5.9 (obtidas para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,3$ ). A Figura 5.10, obtida para os valores de  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 1,4$ ; mostra um comparativo entre as modulações binárias BPSK, BFSK coerente, BFSK não coerente e DPSK conforme a variação do número de braços de diversidade. A probabilidade de erro de bit é descrita como função da relação

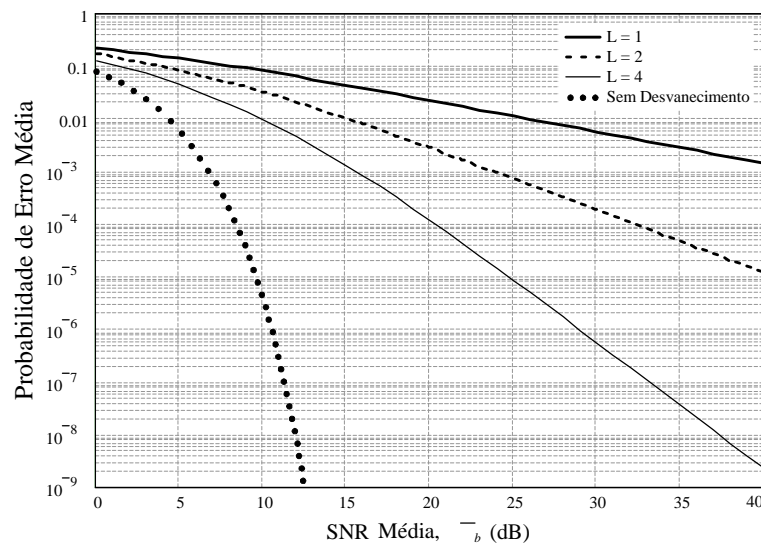
\*Neste estudo utilizou-se o *software* Mathcad® 2001 Professional para executar tais cálculos e para plotar as respectivas curvas de probabilidade de erro média.

SNR média por bit,  $\overline{\gamma}_b$ , que é relacionado com a relação SNR média por canal,  $\overline{\gamma}_c$ , por:

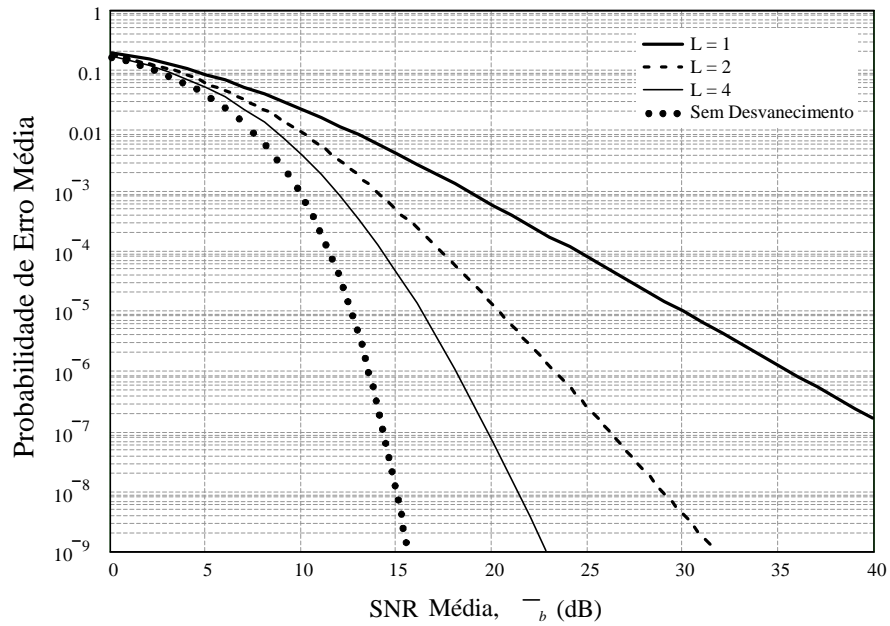
$$\overline{\gamma}_b = L\overline{\gamma}_c \quad (5.17)$$



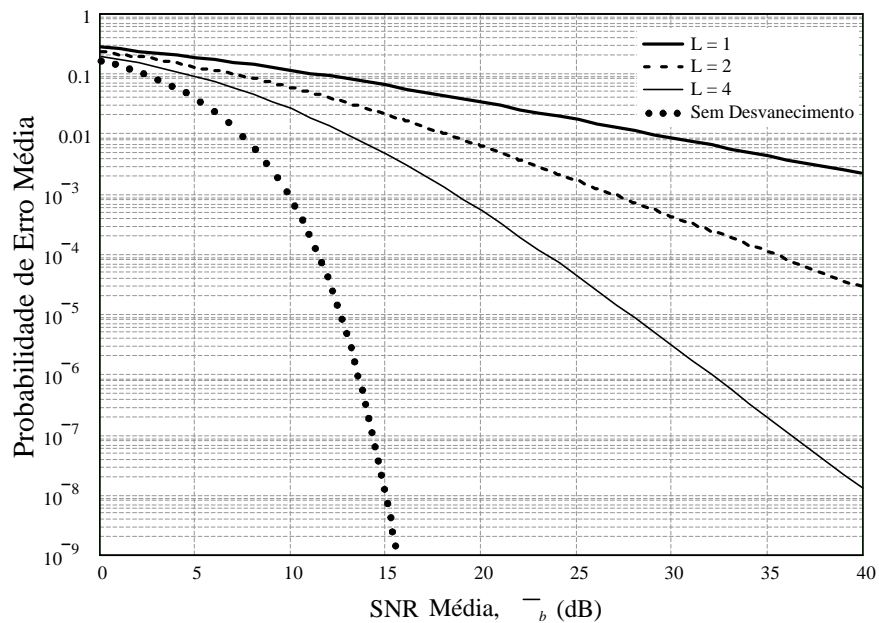
**Figura 5.2:** Probabilidade de erro média com diversidade para modulações BPSK, QPSK e OQPSK para  $\eta = 0,382$  e  $\mu = 0,9$



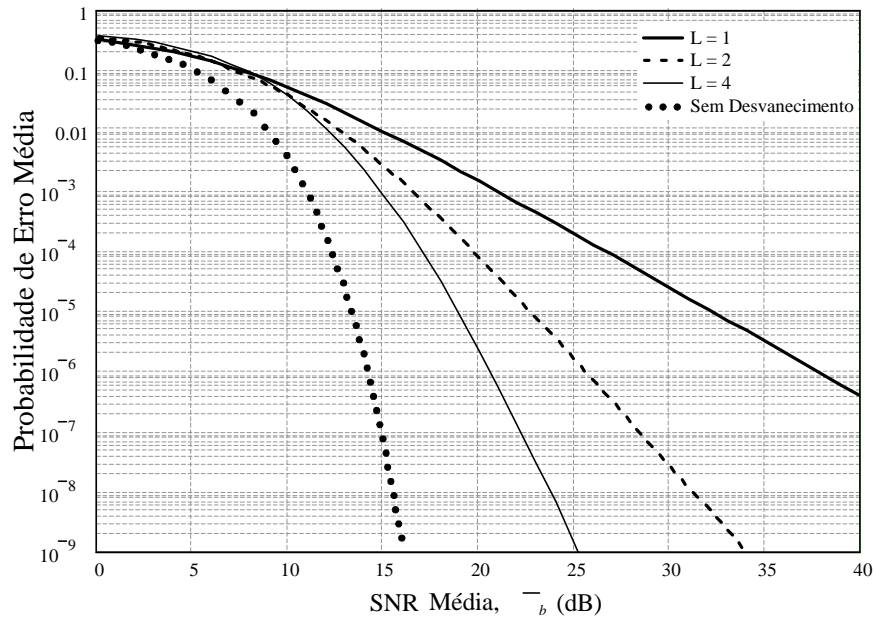
**Figura 5.3:** Probabilidade de erro média com diversidade para modulações BPSK, QPSK e OQPSK para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,3$



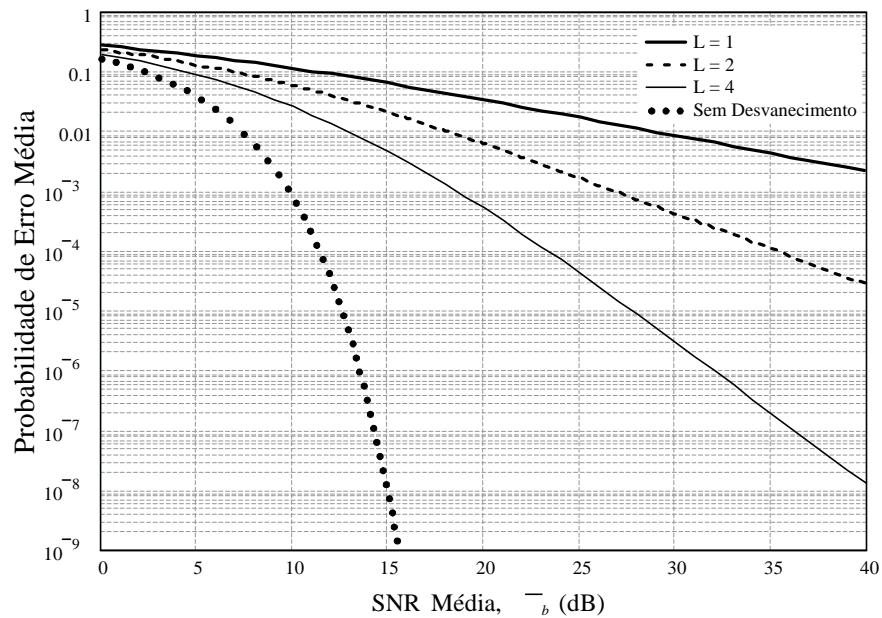
**Figura 5.4:** Probabilidade de erro média com diversidade para a modulação BFSK coerente para  $\eta = 0,382$  e  $\mu = 0,9$



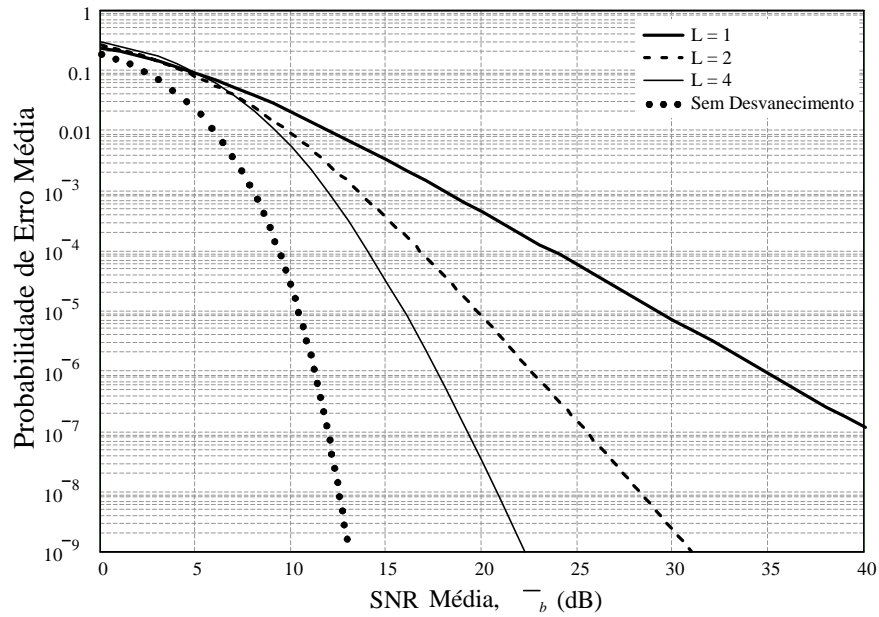
**Figura 5.5:** Probabilidade de erro média com diversidade para modulação BFSK coerente para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,3$



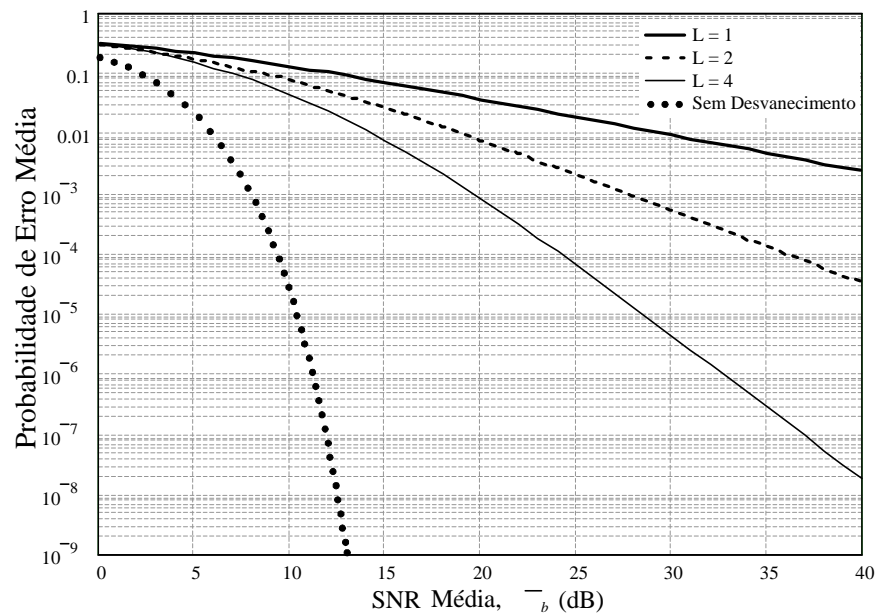
**Figura 5.6:** Probabilidade de erro média com diversidade para a modulação BFSK não coerente para  $\eta = 0,382$  e  $\mu = 0,9$



**Figura 5.7:** Probabilidade de erro média com diversidade para a modulação BFSK não coerente para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,3$

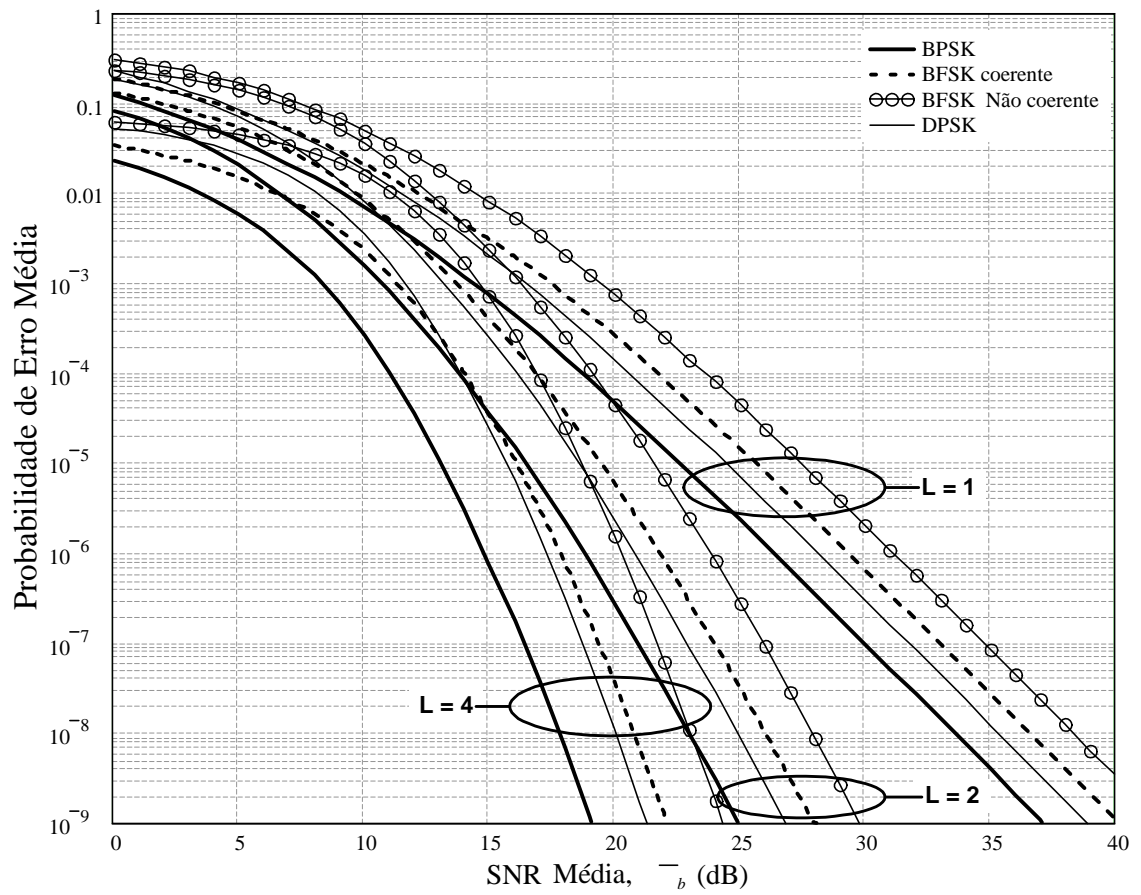


**Figura 5.8:** Probabilidade de erro média com diversidade para a modulação DPSK para  $\eta = 0,382$  e  $\mu = 0,9$



**Figura 5.9:** Probabilidade de erro média com diversidade para a modulação DPSK para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,3$





**Figura 5.10:** Comparação entre a probabilidade de erro média com diversidade para modulações binárias para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 1,4$

## 5.4 Conclusão

Como demonstrado a seguir, conclui-se que ao se fazer uso da distribuição  $\eta - \mu$  para modelar os sinais de recepção em um sistema que empregue a técnica de diversidade com combinação MRC, a fdp resultante também será uma distribuição  $\eta - \mu$ .

Fazendo-se:

$$\mu' = \mu L \quad (5.18)$$

$$\eta' = \eta \quad h' = h \quad H' = H, \quad (5.19)$$

e substituindo na Equação (5.6), tem-se:

$$p(\gamma_b) = \frac{2\sqrt{\pi}h'\mu'}{\Gamma(\mu')L^{\mu'+\frac{1}{2}}} \left(\frac{\mu'}{\gamma_c}\right)^{\mu'+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H'}\right)^{\mu'-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu'h'\frac{\gamma_b}{L\gamma_c}\right) \times \\ \times I_{\mu'-\frac{1}{2}}\left(-2\mu'H'\frac{\gamma_b}{L\gamma_c}\right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (5.20)$$

Definindo a v.a.  $\gamma'_b$  como:

$$\gamma'_b = \frac{\gamma_b}{L}, \quad (5.21)$$

pode-se obter a fdp de  $\gamma'_b$  através da seguinte transformação de variáveis:

$$p(\gamma'_b) = \frac{p(\gamma_b)}{g'(\gamma_b)} \Big|_{\gamma_b=g^{-1}(\gamma'_b)}$$

onde:

$$\begin{cases} g(\gamma_b) = \gamma'_b \\ g'(\gamma_b) = \frac{1}{L} \\ g^{-1}(\gamma'_b) = L\gamma'_b \end{cases}$$

logo,

$$p(\gamma'_b) = Lp(\gamma_b)|_{\gamma_b=L\gamma'_b} \quad (5.22)$$

Finalmente, substituindo-se a Equação (5.20) na Equação (5.22), tem-se:

$$p(\gamma'_b) = \frac{2\sqrt{\pi}h'\mu'}{\Gamma(\mu')} \left(\frac{\mu'}{\gamma_c}\right)^{\mu'+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma'_b}{H'}\right)^{\mu'-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu'h'\frac{\gamma'_b}{\gamma_c}\right) \times \\ \times I_{\mu'-\frac{1}{2}}\left(2\mu'H'\frac{\gamma'_b}{\gamma_c}\right), \quad \gamma'_b \geq 0 \quad (5.23)$$

Observa-se que a fdp resultante também segue uma distribuição  $\eta - \mu$  com novos parâmetros dados pelas Equações (5.18) e (5.19).

A afirmação de que o uso da técnica de diversidade é uma solução plausível para se combater os efeitos da degradação da probabilidade de erro provocada pelo fenômeno do desvanecimento é comprovada pelos resultados descritos nos gráficos da Figura 5.2 a 5.10. Como pode ser verificado nas Figuras 5.2 a 5.10, a utilização de uma recepção com apenas dois braços de diversidade permite um ganho superior a  $10dB$  (para uma probabilidade de erro média de  $10^{-3}$ ) em relação aos esquemas que não empregam recepção com diversidade.

Este capítulo apresentou equações relevantes para o estudo de ambientes de propagação  $\eta - \mu$  que utilizem da técnica de diversidade. Demonstrou-se ainda, o desempenho em termos de probabilidade de erro de bit dos sinais através de canais  $\eta - \mu$  lentos e não seletivos em frequência, utilizando técnicas de diversidade para as modulações BPSK, OQPSK, QPSK, BFSK coerente, BFSK não coerente e DPSK. Como no Capítulo 4, não foi possível a obtenção de expressões fechadas para o cálculo da probabilidade de erro média devido à complexidade das integrais que as descrevem (Equações 5.13 à 5.16). Não obstante, as referidas integrais foram calculadas numericamente (adotando-se alguns valores para os parâmetros  $\eta$  e  $\mu$ ), provendo assim, os gráficos para o desempenho em termos de probabilidade de erro média para as modulações consideradas no presente capítulo.

# Capítulo 6

## Geração de Números Aleatórios Distribuídos de Acordo com a Distribuição $\eta - \mu$

### 6.1 Introdução

A simulação de qualquer canal rádio móvel que possua sinal com comportamento aleatório, como os canais Nakagami-m, Hoyt e Rayleigh, requer um método de geração ou de obtenção de números aleatoriamente distribuídos de acordo com a fdp que melhor represente o canal a ser simulado [34]. No presente capítulo é demonstrada a utilização de um método estatístico para a geração de números aleatórios distribuídos de acordo com a fdp de  $\eta - \mu$ .

A geração de números aleatórios pode ser obtida através de um dos vários métodos existentes, como por exemplo, através do método da Inversão, da Composição, ou através do método da Convolução. Ao optar-se por um determinado método deve-se considerar a sua eficiência e aplicabilidade para uma determinada distribuição. Como exemplo, verifica-se que o método da Inversão requer o conhecimento da fdc [35]. Entretanto, em alguns casos apesar de se ter a fdp, não se conhece uma forma fechada para a fdc. O método da Aceitação-Rejeição pode ser utilizado quando conhece-se apenas a fdp de uma dada distribuição.

Neste estudo optou-se pelo método da Aceitação-Rejeição para a geração de amostras distribuídas de acordo com a fdp  $\eta - \mu$ , uma vez que, não foi encontrada uma expressão na forma fechada para a fdc da referida distribuição. O método é genérico podendo ser aplicado para qualquer valor de  $\eta$  e  $\mu$ . Na seção seguinte é apresentado resumidamente o método da Aceitação-Rejeição e, na seção posterior,

aplica-se o referido método para a distribuição  $\eta - \mu$ .

## 6.2 O Método da Aceitação-Rejeição

O método da Aceitação-Rejeição [34] necessita que se especifique uma função  $t(x)$  que seja majoritária em relação a fdp  $p(x)$  que se deseja gerar, isto é,  $t(x) \geq p(x)$  para todo  $x$ . Note que a função  $t(x)$  não será uma fdp, pois:

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) \, dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \, dx = 1, \quad (6.1)$$

mas a função

$$r(x) = \frac{t(x)}{c} \quad (6.2)$$

claramente é uma fdp. Assume-se que  $t(x)$  é tal que  $c < \infty$ . Este método é capaz de gerar uma v.a.  $Y$  com fdp  $r(x)$ . O algoritmo geral segue os seguintes passos:

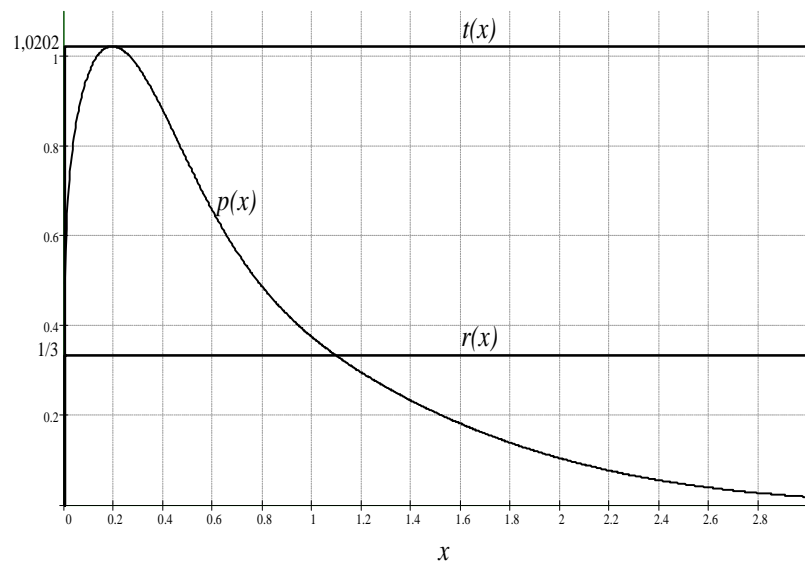
1. Gerar  $Y$  tendo uma distribuição qualquer (uniforme, gaussiana, exponencial, dentre outras);
2. Gerar uma distribuição uniforme  $U \sim U(0, 1)$ , independente de  $Y$ ;
3. Se  $U \leq \frac{p(Y)}{t(Y)}$ , retornar  $X = Y$ . Caso contrário, retornar para o passo 1 e tentar novamente.

O algoritmo continua realizando o processamento até ser gerado  $N$  números aleatórios  $X$  distribuídos de acordo com a distribuição  $p(x)$  desejada. Como demonstrado em [34] a probabilidade de aceitação no passo 3 do algoritmo é  $\frac{1}{c}$ . A validade deste método pode ser encontrada em [34].

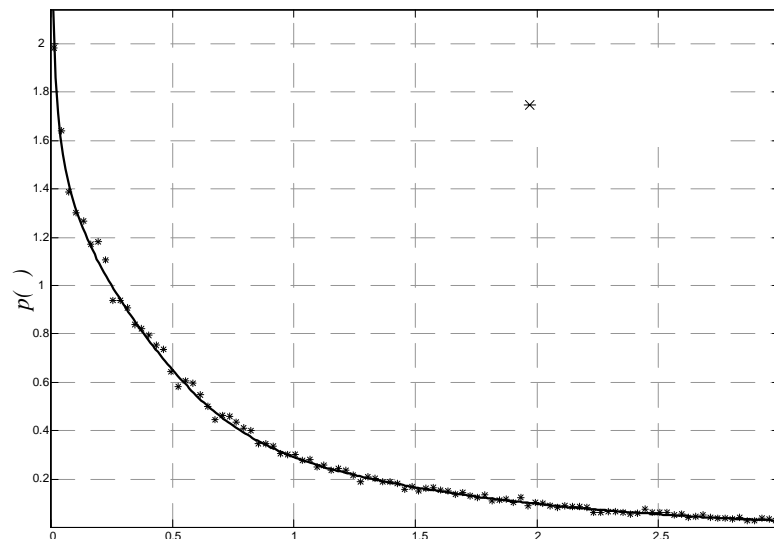
## 6.3 Geração de Números Aleatórios de Acordo com a Distribuição $\eta - \mu$

Para a geração de números aleatórios distribuídos segundo a fdp de  $\eta - \mu$  será utilizado o método da Aceitação-Rejeição descrito na Seção 6.2. A título de exemplo, seja a distribuição  $\eta - \mu$  com  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,3$ . O valor máximo para a fdp da distribuição  $\eta - \mu$  é  $1,0202$ . Para efeitos de simplificação a função  $t(x)$  que é majoritária em relação a fdp de  $\eta - \mu$  é assumida ser uma reta o que levará a função  $r(x)$  ser uma função uniformemente distribuída, então temos que  $t(x) = 1,0202$ . Calculando-se a constante  $c$  através da Equação 6.1, com limites

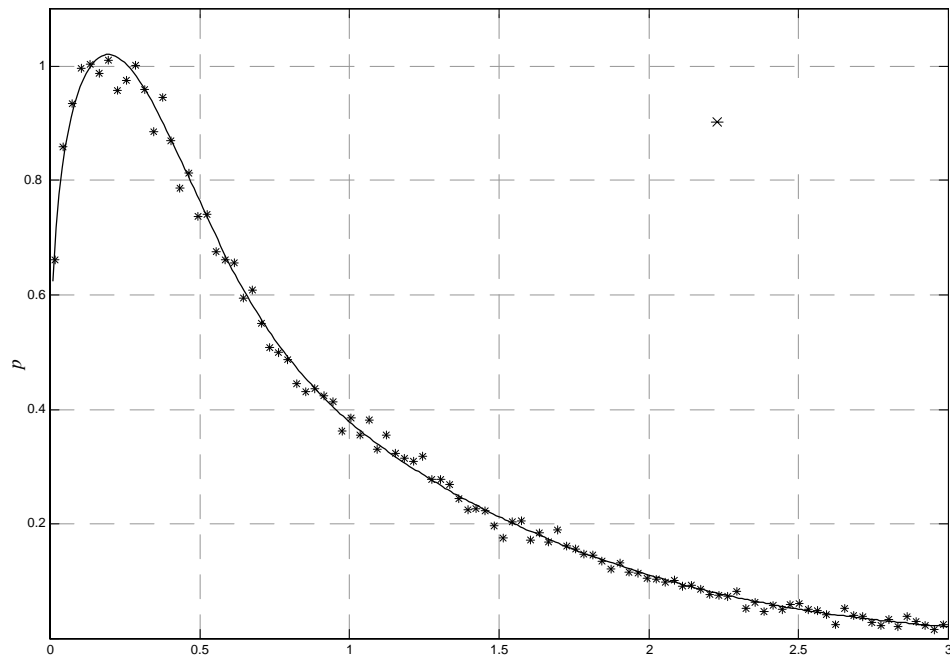
de 0 e 3, obtemos  $c = 3,0606$ , logo, através da equação 6.2,  $r(x) = \frac{1}{3}$  que é uma função uniformemente distribuída de 0 a 3. A Figura 6.1 ilustra as funções  $t(x)$ ,  $r(x)$  e  $p(x)$  e as Figuras 6.2 a 6.6 exibem um comparativo entre a fdp teórica e a fdp gerada a partir do método da Aceitação-Rejeição para vários valores de  $\eta$  e  $\mu$ .



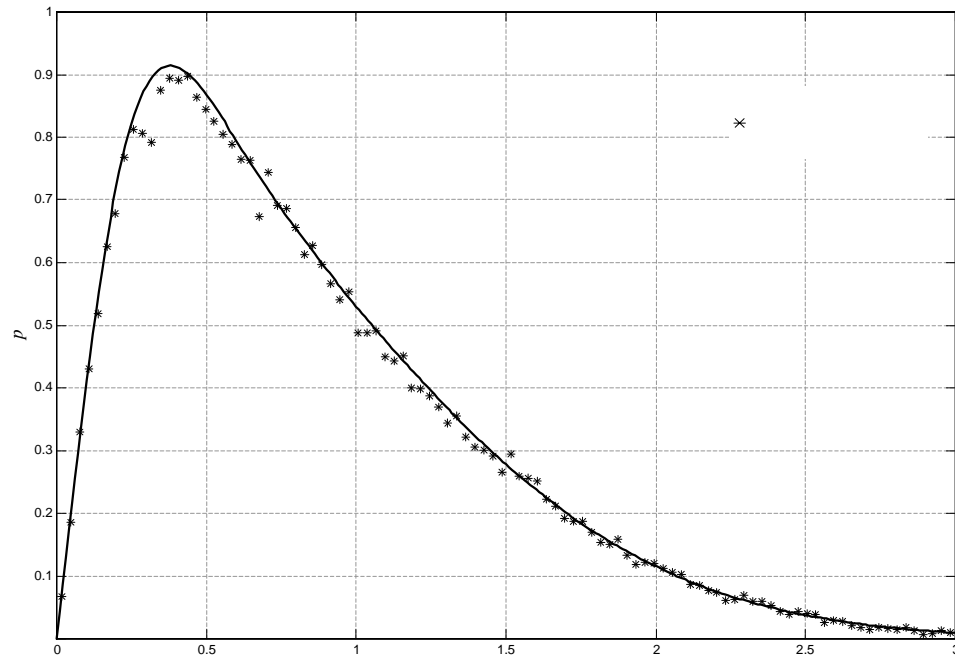
**Figura 6.1:**  $t(x)$ ,  $r(x)$  e  $p(x)$  para o método de Aceitação-Rejeição para a distribuição  $\eta - \mu$  com os parâmetros  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,3$



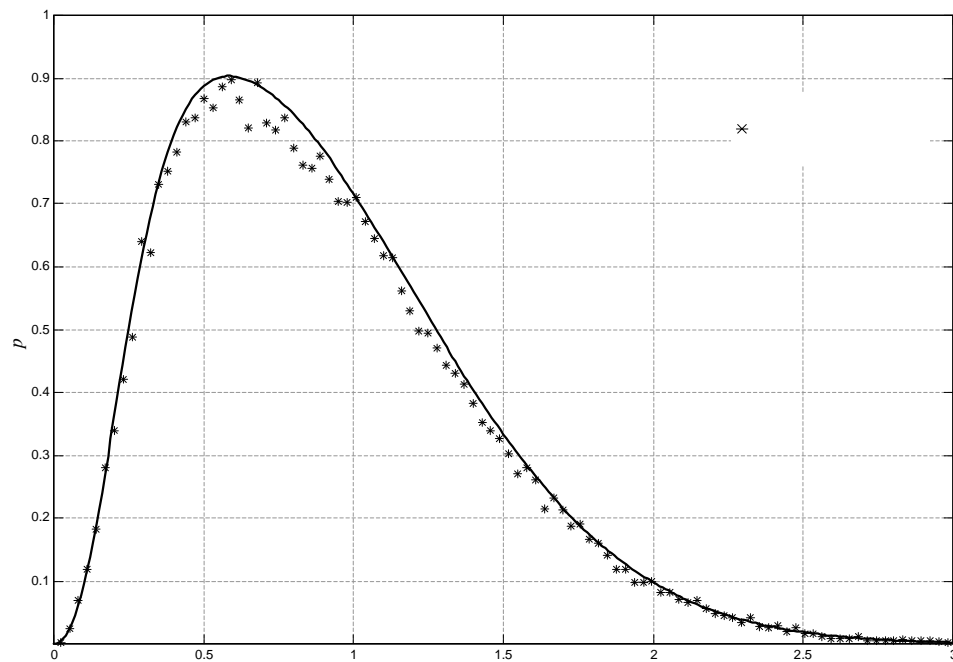
**Figura 6.2:** Comparativo entre a fdp teórica de  $\eta - \mu$  e a fdp gerada a partir do método da Aceitação-Rejeição para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,2$



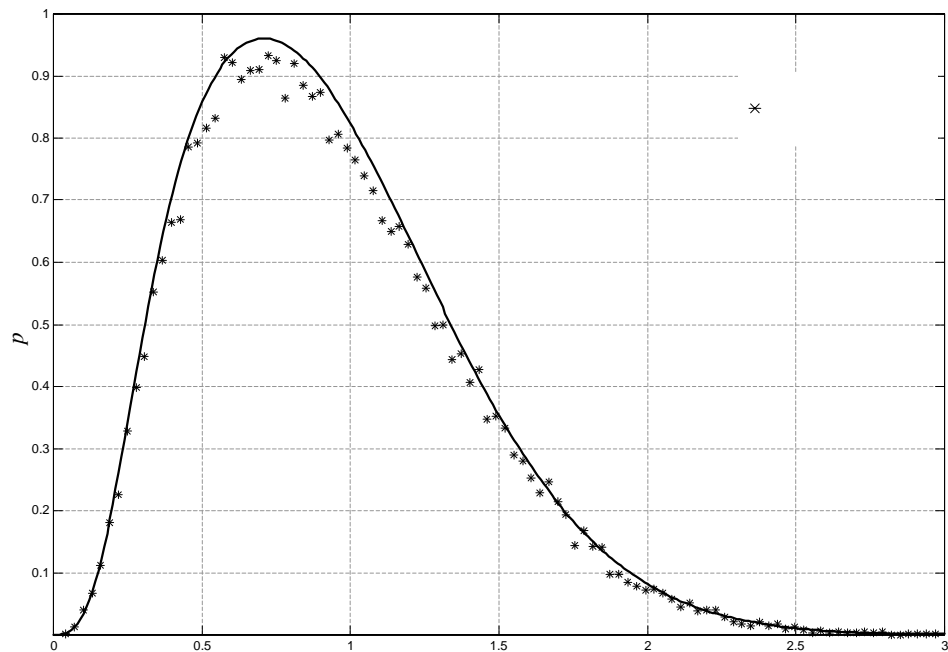
**Figura 6.3:** Comparativo entre a fdp teórica de  $\eta - \mu$  e a fdp gerada a partir do método da Acitação-Rejeição para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,3$



**Figura 6.4:** Comparativo entre a fdp teórica de  $\eta - \mu$  e a fdp gerada a partir do método da Acitação-Rejeição para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,5$



**Figura 6.5:** Comparativo entre a fdp teórica de  $\eta - \mu$  e a fdp gerada a partir do método da Aceitação-Rejeição para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 0,8$



**Figura 6.6:** Comparativo entre a fdp teórica de  $\eta - \mu$  e a fdp gerada a partir do método da Aceitação-Rejeição para  $\eta = 0,06$  e  $\mu = 1$

O método da Aceitação-Rejeição pressupõe a geração de um grande número de amostras e a utilização de parte destas amostras, se a condição do passo 3



no algoritmo anteriormente descrito for atendida. Para efeito de comparação a Tabela 6.1 descreve o número de amostras geradas e o número de amostras aproveitadas ou aceitas para cada par de valores de  $\eta$  e  $\mu$ . Note que a porcentagem aproveitada está exatamente de acordo com a quantidade  $\frac{1}{c}$  já que foi utilizada como função  $t(x)$  o valor máximo de cada fdp para um dado par  $\eta$  e  $\mu$ .

**Tabela 6.1:** *Comparativo entre as porcentagens de amostras aceitas utilizando o Método da Aceitação-Rejeição da distribuição  $\eta - \mu$*

Parâmetros			Amostras		% Aproveitada	
$\eta$	$\mu$	$m$	Aceitas	Geradas	Teórico	Prático
0,06	0,01	0,011	50.000	2.132.241	10,55%	2,35%
0,06	0,2	0,224	50.000	325.664	15,60%	15,35%
0,06	0,23	0,258	50.000	225.006	22,25%	22,22%
0,06	0,3	0,336	50.000	151.854	32,66%	32,93%
0,06	0,5	0,56	50.000	133.419	36,45%	37,48%
0,06	0,8	0,896	50.000	130.375	36,90%	38,35%
0,06	1	1,12	50.000	137.110	34,72%	36,47%
0,06	1,2	1,344	50.000	144.928	32,24%	34,45%
0,06	1,4	1,568	50.000	154.129	30,01%	32,44%
0,06	2	2,24	50.000	181.975	24,87%	27,48%
0,06	4	4,478	50.000	246.765	16,09%	20,26%
0,026	0,713	0,75	50.000	121.573	40,48%	41,13%
0,127	0,6	0,75	50.000	130.326	36,13%	38,37%
0,127	1,2	1,5	50.000	150.769	29,17%	33,16%
0,382	0,9	1,5	50.000	141.012	29,00%	35,46%

## 6.4 Conclusão

Como pode ser observado nas figuras da seção anterior, a aplicação do método da Aceitação-Rejeição mostrou-se eficiente no objetivo de gerar amostras com amplitudes distribuídas de acordo com a distribuição  $\eta - \mu$ . É importante ressaltar que foi utilizada uma função  $t(x)$  constante o que produz uma fdp  $r(x)$  uniformemente distribuída. O método é geral e, portanto, é necessário que se utilize apenas uma fdp uniforme. Para aumentar-se a porcentagem das amostras aceitas, pode-se utilizar várias funções uniformemente distribuídas, ou mesmo outro tipo de fdp, com o objetivo de diminuir a área abaixo de  $t(x)$ . Tal medida acarreta em um aumento da probabilidade de aceitação das amostras e, portanto, aumenta-se a eficiência do método em termos de aceitação de amostras.

# Capítulo 7

## Epílogo

Nesta dissertação apresentou-se um estudo teórico e matemático de canais modelados de acordo com a distribuição  $\eta - \mu$ . Através deste estudo foram desenvolvidas expressões e gráficos de desempenho para algumas modulações, modelando assim, o canal descrito pela distribuição  $\eta - \mu$ .

Esta modelagem matemática do canal\* constitui-se em uma ferramenta útil na compreensão do mesmo e de seus efeitos nos sinais de comunicação, o que fornece bases teóricas para que se produza simulações computacionais. Por conseguinte, esta dissertação contribui para o estudo e para a compreensão de canais com desvanecimento. Compreensão esta que pode ser utilizada para minimizar os efeitos nocivos à propagação do sinal causados pelo fenômeno do desvanecimento, como por exemplo, fornecendo bases teóricas para que se produzam métodos eficazes de diversidade.

Para se alcançar a proposta deste estudo, desenvolveu-se diversos trabalhos passando desde o estudo de vários canais já amplamente desenvolvidos (Capítulo 2), análise do canal  $\eta - \mu$  sem (Capítulo 3) e com o uso da técnica de diversidade (Capítulo 5) e a implementação propriamente dita das curvas de desempenho para o canal  $\eta - \mu$  com (Capítulo 3) e sem o uso da técnica de diversidade (Capítulo 5). As conclusões referentes a cada uma das expressões e/ou gráficos são encontrados no decorrer do texto dos próprios capítulos. A seguir, são apresentadas as contribuições e sugestões para pesquisas adicionais ou para trabalhos futuros.

### 7.1 Contribuições da Dissertação

No decorrer deste estudo pode-se verificar algumas contribuições originais para o estudo de canais sob o efeito do desvanecimento. Tais contribuições são listadas

---

\*Vale lembrar que considerou-se neste estudo os canais com desvanecimento lento e não seletivo em frequência.

a seguir, segundo a ordem de surgimento no texto:

- O desenvolvimento da fdp da distribuição  $\eta - \mu$  em função da relação SNR  $\gamma_b$  (Capítulo 3).
- A análise de desempenho em um canal  $\eta - \mu$ , sem o uso da técnica de diversidade, verificada no Capítulo 4 e os resultados obtidos no mesmo capítulo.
- Todos os resultados obtidos no Capítulo 5, que constituiu-se no desenvolvimento da fdp da distribuição  $\eta - \mu$  para canais com diversidade, na análise de desempenho utilizando técnica de diversidade e na comprovação matemática de que ao se fazer uso da distribuição  $\eta - \mu$  para modelar sinais de recepção em um sistema que empregue a técnica de diversidade com combinação MRC, a fdp resultante será também será uma distribuição  $\eta - \mu$ .
- A implementação do método da Aceitação-Rejeição para a geração de números aleatórios distribuídos de acordo com a distribuição  $\eta - \mu$ .

## 7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Verificada a importância de se modelar canais com desvanecimento, o estudo realizado nesta dissertação deve ter continuidade. Sendo assim, objetivando dar seqüência e avanço a este estudo, esta seção apresenta algumas sugestões para possíveis trabalhos futuros.

Os Capítulos 4 e 5 forneceram integrais para o cálculo da probabilidade de erro média em canais  $\eta - \mu$  com e sem o uso de diversidade. Estas integrais foram calculadas numericamente, já que não conseguiu-se obter expressões na forma fechada para as mesmas. A provável obtenção de expressões na forma fechada para o cálculo da probabilidade de erro média em canais  $\eta - \mu$  é um estudo a ser desenvolvido.

Uma relevante sugestão é o desenvolvimento de um simulador para canais  $\eta - \mu$  a ser empregado no projeto de sistemas de comunicações móveis. A modelagem matemática do canal  $\eta - \mu$  realizada no decorrer desta dissertação fornece bases iniciais para que se produza tais simulações computacionais.

Um complemento à sugestão anterior, seria o desenvolvimento de um modelo que possa incluir os parâmetros  $\eta$ ,  $\mu$ , espalhamento Doppler e as perdas no percurso. E ainda, pode-se avaliar o desempenho em canais com desvanecimento lento e seletivo em frequência, por exemplo.

Outro trabalho que se pode propor é o desenvolvimento de expressões e/ou gráficos de probabilidade de erro média em canais  $\eta - \mu$  para modulações que não

---

foram abordadas no estudo apresentado nesta dissertação (como por exemplo as modulações 8PSK, 16QAM, 4FSK e MSK entre outras). Por fim, o desenvolvimento de uma metodologia para o ajuste de dados experimentais ao modelo de desvanecimento  $\eta - \mu$ , constitui-se em uma última sugestão para dar-se continuidade e avanço nesse estudo.

# Anexo A

## Soma de Variáveis Aleatórias

Para que se possa fazer uso das tabelas de transformadas disponíveis, pode-se utilizar a transformada direta de Laplace de  $p(r)$  que é definida como sendo o valor médio de  $e^{-sr}$ . Assim:

$$\mathcal{L}[p(r)] = E [e^{-sr}] = \int_0^{\infty} e^{-sr} p(r) dr, \quad r \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

$$p(r) = \mathcal{L}^{-1} \{ \mathcal{L}[p(r)] \} \quad (\text{A.2})$$

$$E (r^n) = \left. \frac{d^n}{dv^n} \{ \mathcal{L}[p(r)]|_{s=-v} \} \right|_{v=0} \quad (\text{A.3})$$

Seja  $u = x + y$ , onde  $x$  e  $y$  são variáveis aleatórias com transformadas de Laplace  $\mathcal{L}[p(x)]$  e  $\mathcal{L}[p(y)]$ , respectivamente, a transformada de Laplace de  $u$  será:

$$\mathcal{L}[p(u)] = E [e^{-su}] = E \{ \exp [-s(x + y)] \} = E [e^{-sx} e^{-sy}], \quad u \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

Geralmente, a expressão (A.4) é difícil de se calcular. Não obstante, quando  $x$  e  $y$  são independentes, pode-se escrever a esperança do produto,  $e^{-sx} e^{-sy}$ , como sendo o produto das esperanças,  $E [e^{-sx}] E [e^{-sy}]$ . Neste caso, encontrar  $\mathcal{L}[p(u)]$  torna-se uma tarefa menos árdua caso conheça-se as transformadas  $\mathcal{L}[p(x)]$  e  $\mathcal{L}[p(y)]$ . Por conseguinte vem:

$$\mathcal{L}[p(u)] = E [e^{-sx} e^{-sy}] = E [e^{-sx}] E [e^{-sy}]$$

$$\mathcal{L}[p(u)] = \mathcal{L}[p(x)] \mathcal{L}[p(y)], \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad (\text{A.5})$$

Quando  $n$  variáveis aleatórias  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são independentes, a esperança

do produto  $g(x_1)g(x_2)\dots g(x_n)$  pode ser escrita como o produto das esperanças:

$$E[g(x_1)g(x_2)\dots g(x_n)] = E[g(x_1)]E[g(x_2)]\dots E[g(x_n)]$$

Logo, têm-se que para uma seqüência  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (onde,  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ ), a transformada de Laplace de  $r = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  é dada pela Equação (A.6).

$$\mathcal{L}[p(r)] = \mathcal{L}[p(x_1)]\mathcal{L}[p(x_2)]\dots \mathcal{L}[p(x_n)], \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

E se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são identicamente distribuídas, então  $\mathcal{L}[p(x_i)] = \mathcal{L}[p(x)]$ , para todo  $i$ . Logo, pode-se dizer que para as variáveis aleatórias  $x_1, x_2, \dots, x_n$  independentes e identicamente distribuídas (iid), cada qual com sua transformada de Laplace  $\mathcal{L}[p(x)]$ , a transformada de Laplace de  $r = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  (onde  $r \geq 0$  e  $x_i \geq 0$ ), é:

$$\mathcal{L}[p(r)] = \{\mathcal{L}[p(x)]\}^n, \quad r \geq 0, \quad x \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

De [36] sabe-se que a fdp  $p(r)$  é obtida através da convolução das funções densidade de probabilidade individuais  $p(x_i)$ . A transformada de Laplace de  $p(r)$  é simplesmente a multiplicação das transformadas de Laplace individuais  $\mathcal{L}[p(x_i)]$ . Geralmente, o cálculo destas convoluções é uma tarefa custosa, e uma alternativa a esta tarefa seria transformar  $p(r)$  em  $\mathcal{L}[p(x_i)]$  e aplicar a Equação (A.6) para obter  $\mathcal{L}[p(r)]$ , e finalmente, calcular a transformada inversa de  $\mathcal{L}[p(r)]$  obtendo assim a fdp  $p(r)$ .

# Anexo B

## Sumário Matemático

Este Anexo apresenta as principais equações encontradas nesta dissertação. As equações se encontram organizadas de acordo com as distribuições que elas descrevem. É visto ainda na Figura B.1 um organograma que relaciona a distribuição  $\eta - \mu$  com outras distribuições probabilísticas que são seus principais casos especiais.

### Mudanças de Variáveis Úteis

$$p(\gamma_b) = \frac{p(r)}{2\sqrt{\gamma_b \gamma_b / \Omega}} \Big|_{r=\sqrt{\Omega \gamma_b / \gamma_b}} \quad (\text{B.1})$$

$$p(\rho) = \hat{r} \cdot p(r) \Big|_{r=\rho \cdot \hat{r}} \quad (\text{B.2})$$

$$p(w) = \frac{p(r)}{r} \Big|_{r=\sqrt{2w}} \quad (\text{B.3})$$

$$p(\omega) = p(w) \bar{w} \Big|_{w=\omega \cdot \bar{w}} \quad (\text{B.4})$$

$$p(r) = p(w) \sqrt{2w} \Big|_{w=\frac{r^2}{2}} \quad (\text{B.5})$$

## Distribuição $\eta - \mu$

Sem o uso da Técnica de Diversidade

$$\eta = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2} \quad (\text{B.6})$$

$$h = \frac{2 + \eta^{-1} + \eta}{4} = \frac{(1 + \eta)^2}{4\eta} \quad H = \frac{\eta^{-1} - \eta}{4} = \frac{1 - \eta^2}{4\eta} \quad (\text{B.7})$$

$$\mu = m \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (\text{B.8})$$

$$p(r) = \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu}{\hat{r}\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^{2\mu} \exp\left[-2\mu h \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right] I_{\mu-\frac{1}{2}}\left[2\mu H \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right], \quad r \geq 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\mu = \frac{E^2(r^2)}{\text{Var}(r^2)} \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (\text{B.10})$$

$$p(w) = \frac{2\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu}{\bar{w}\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}} \left(\frac{w}{\bar{w}}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h \frac{w}{\bar{w}}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H \frac{w}{\bar{w}}\right), \quad w \geq 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\mu = \frac{E^2(w)}{\text{Var}(w)} \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (\text{B.12})$$

$$p(\rho) = \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu}{\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}} \rho^{2\mu} \exp(-2\mu h \rho^2) I_{\mu-\frac{1}{2}}(2\mu H \rho^2), \quad \rho \geq 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\mu = \frac{1}{\text{Var}(\rho^2)} \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (\text{B.14})$$

$$p(\omega) = \frac{2\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu}{\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}} \omega^{\mu-\frac{1}{2}} \exp(-2\mu h \omega) I_{\mu-\frac{1}{2}}(2\mu H \omega), \quad \omega \geq 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\mu = \frac{1}{\text{Var}(\omega)} \frac{1 + \eta^2}{(1 + \eta)^2} \quad (\text{B.16})$$



$$p(\gamma_b) = \frac{2\sqrt{\pi}h^\mu}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{\mu}{\gamma_b}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(2\mu H\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\mu = \frac{E^2(\gamma_b)}{\text{Var}(\gamma_b)} \frac{1+\eta^2}{(1+\eta)^2} \quad (\text{B.18})$$

### Aproximações

$\eta \rightarrow 0$

$$p(\rho) \approx \frac{2\mu^\mu}{\Gamma(\mu)} \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^\mu \rho^{2\mu-1} \exp[-\mu\rho^2(\eta+1)], \quad \rho \geq 0 \quad (\text{B.19})$$

$$p(\gamma_b) \approx \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^\mu \frac{\mu^\mu}{\Gamma(\mu)\gamma_b^\mu} \gamma_b^{\mu-1} \exp\left[-\mu(\eta+1)\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right], \quad \gamma_b \geq 0 \quad (\text{B.20})$$

$\eta \rightarrow 1$

$$p(\rho) \approx \frac{2(2\mu)^{2\mu}}{\Gamma(2\mu)} \rho^{2(2\mu)-1} \left[\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}\right]^\mu \exp\left[-2\mu\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}\rho^2\right], \quad \rho \geq 0 \quad (\text{B.21})$$

$$p(\gamma_b) \approx \frac{(2\mu)^{2\mu}\gamma_b^{2\mu-1}}{\Gamma(2\mu)\gamma_b^{2\mu}} \left[\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}\right]^\mu \exp\left[-2\mu\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}\frac{\gamma_b}{\gamma_b}\right], \quad \gamma_b \geq 0 \quad (\text{B.22})$$

### Empregando-se a Técnica de Diversidade

$$p(\gamma_b) = \frac{2\sqrt{\pi}h^{\mu L}}{\Gamma(\mu L)} \left(\frac{\mu}{\gamma_c}\right)^{\mu L+\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_b}{H}\right)^{\mu L-\frac{1}{2}} \exp\left(-2\mu h\frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right) \times \\ \times I_{\mu L-\frac{1}{2}}\left(2\mu H\frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (\text{B.23})$$

### Aproximações

$\eta \rightarrow 0$

$$p(\gamma_b) \approx \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^{\mu L} \frac{\mu^{\mu L}}{\Gamma(\mu L)\gamma_c^{\mu L}} \gamma_b^{\mu L-1} \exp\left[-\mu(\eta+1)\frac{\gamma_b}{\gamma_c}\right], \quad \gamma_b \geq 0 \quad (\text{B.24})$$

$\eta \rightarrow 1$

$$p(\gamma_b) \approx \frac{(2\mu)^{2\mu L} \gamma_b^{2\mu L-1}}{\Gamma(2\mu L) \bar{\gamma}_c^{2\mu L}} \left[ \frac{(1+\eta)^2}{4\eta} \right]^\mu \exp \left[ -2\mu \frac{(1+\eta)^2 \gamma_b}{4\eta \bar{\gamma}_c} \right], \quad \gamma_b \geq 0 \quad (\text{B.25})$$

## Distribuição Hoyt

$$q = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \quad 0 \leq q \leq 1 \quad (\text{B.26})$$

$$p(r) = \frac{(1+q^2)r}{q\Omega} \exp \left[ -\frac{(1+q^2)^2 r^2}{4q^2\Omega} \right] I_0 \left[ \frac{(1-q^4)r^2}{4q^2\Omega} \right], \quad r \geq 0, \quad (\text{B.27})$$

$$p(r) = \frac{(1+q^2)r}{q \cdot \hat{r}^2} \exp \left[ -\frac{(1+q^2)^2}{4q^2} \left( \frac{r}{\hat{r}} \right)^2 \right] I_0 \left[ \frac{1-q^4}{4q^2} \left( \frac{r}{\hat{r}} \right)^2 \right], \quad r \geq 0 \quad (\text{B.28})$$

$$p(\rho) = \frac{(1+q^2)}{q} \rho \cdot \exp \left[ -\frac{(1+q^2)^2}{4q^2} \rho^2 \right] I_0 \left( \frac{1-q^4}{4q^2} \rho^2 \right), \quad \rho \geq 0 \quad (\text{B.29})$$

$$p(\gamma_b) = \frac{1+q^2}{2q\bar{\gamma}_b} \exp \left[ -\frac{(1+q^2)^2}{4q^2\bar{\gamma}_b} \gamma_b \right] I_0 \left( \frac{1-q^4}{4q^2\bar{\gamma}_b} \gamma_b \right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (\text{B.30})$$

## Distribuição Nakagami- $m$

$$m = \frac{E^2(r^2)}{\text{Var}(r^2)} \quad (\text{B.31})$$

$$p(r) = \frac{2}{\Gamma(m)} \left( \frac{m}{\Omega} \right)^m r^{2m-1} \exp \left( -\frac{mr^2}{\Omega} \right), \quad r \geq 0 \quad (\text{B.32})$$

$$p(\rho) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)} \rho^{2m-1} \exp(-m\rho^2), \quad \rho \geq 0 \quad (\text{B.33})$$

---

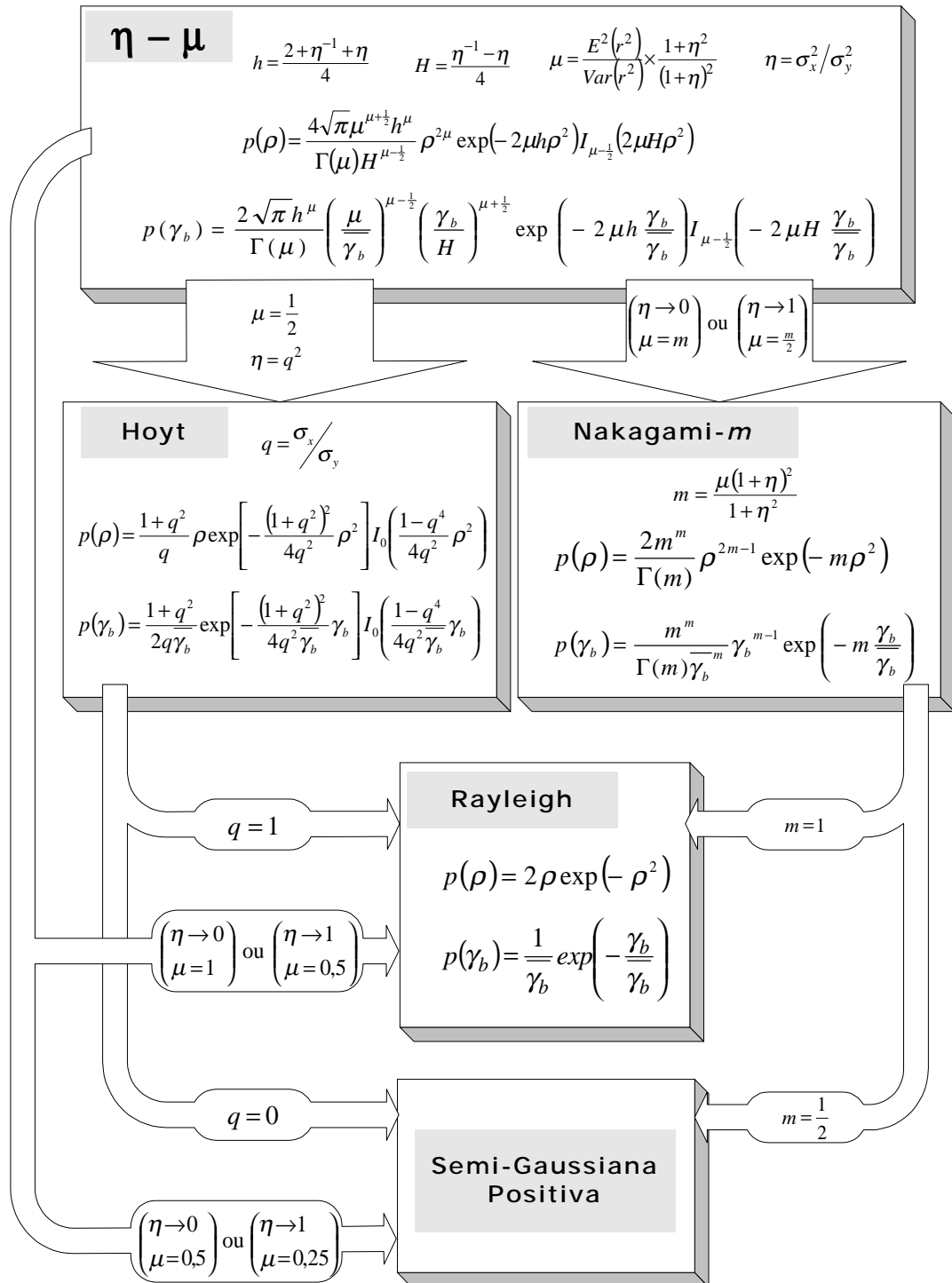
$$p(\gamma_b) = \frac{m^m}{\Gamma(m)\overline{\gamma_b}^m} \gamma_b^{m-1} \exp\left[-m\left(\frac{\gamma_b}{\overline{\gamma_b}}\right)\right], \quad \gamma_b \geq 0 \quad (\text{B.34})$$

## Distribuição Rayleigh

$$p(r) = \frac{2r}{\Omega} \exp\left(-\frac{r^2}{\Omega}\right), \quad r \geq 0 \quad (\text{B.35})$$

$$p(\rho) = 2\rho \cdot \exp(-\rho^2), \quad \rho \geq 0 \quad (\text{B.36})$$

$$p(\gamma_b) = \frac{1}{\overline{\gamma_b}} \exp\left(-\frac{\gamma_b}{\overline{\gamma_b}}\right), \quad \gamma_b \geq 0 \quad (\text{B.37})$$



**Figura B.1:** *Sumário matemático*

# Referências Bibliográficas

- [1] M. Yacoub, “General fading distributions”, *Revista Da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, vol. 17, pp. 1–13, junho de 2002.
- [2] G. Stüber, *Principles of Mobile Communications*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [3] R. A. Souza, “Análise de desempenho de técnicas de comunicação digital em canais com distribuição  $\kappa - \mu$ , desvanecimento lento e não seletivo em frequência”, Master’s thesis, Instituto Nacional de Telecomunicações de Santa Rita do Sapucaí, 2002.
- [4] M. Yacoub, *Foundations of Mobile Radio Engineering*, CRC Press, 1993.
- [5] Y. Okumura et al., “Field strength and its variability in VHF and UHF land-mobile radio service”, *Review of the Electrical Communication Laboratories*, pp. 825–873, September-October 1968.
- [6] M. Hata, “Empirical formula for propagation loss in land mobile radio”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, pp. 317–325, September 1980.
- [7] W. Lee, “Mobile communications design fundamental”, *Howard W Sans and Company*.
- [8] J. Parsons & M. Ibrahim, “Signal strength predictions in built-up areas, part 1: median signal strength”, *IEEE Proceeding*, pp. 377–384, August 1983.
- [9] K. Bullington, “Radio propagation at frequencies about 30 mc”, *Proc. IRE*, pp. 1122–1136, 1947.
- [10] J. Deygout, “Multiple knife-edge diffraction of microwaves”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, pp. 480–489, July 1966.
- [11] G. Giovaneli, “An analysis of simplified solutions for multiple knife-edge diffraction”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, pp. 297–301, March 1984.

- [12] J. Proakis, *Digital Communications*, McGraw Hill, 4<sup>th</sup> edition, 2001.
- [13] H. James & P. Wells, “Some tropospheric scatter propagation measurements near the radio-horizon”, *Proc. IRE*, pp. 1336–1340, October 1955.
- [14] G. Sugar, “Some fading characteristics of regular VHF ionospheric propagation”, *Proc. IRE*, pp. 1432–1436, October 1955.
- [15] S. Basu et al., “250 MHz/GHz scintillation parameter in the equatorial, polar, and aural environments”, *IEEE J. Selt. Areas Commun.*, vol. SAC-5, pp. 102–115, February 1987.
- [16] T. Staley et al., “Performance of coherent MPSK on frequency selective slowly fading channels”, *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (Vtc96)*, Atlanta, GA., pp. 784–788, April 1996.
- [17] M. Nakagami, “The m-distribution: A general formula of intensity distribution of rapid fading, in statistical methods in radio wave propagation”, *Oxford Pergamon Press*, pp. 3–36, 1960.
- [18] M. Simon & M. Alouini, *Digital Communications over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [19] M. Simon & M. Alouini, “A unified approach to performance analysis of digital communications over generalized fading channels”, *IEEE Proc.*, vol. 48, pp. 1860–1877, September 1998.
- [20] B. Sklar, *Digital Communications - Fundamentals and Applications*, Prentice Hall PTR, 2001.
- [21] F. Xiong, *Digital Modulation Techniques*, Artech House, Inc., 2000.
- [22] H. Suzuki, “A statistical model of urban radio propagation”, *IEEE Transaction on Communication*, pp. 673–680, 1977.
- [23] T. Aulin, “Characteristics of a digital mobile radio channel”, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-30, pp. 45–53, May 1981.
- [24] W. Braun & U. Dersch, “A physical mobile radio channel model”, *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 40, pp. 472–482, May 1991.
- [25] A. Sheikh M. Handforth & M. Abdi, “Indoor mobile radio channel at 956 MHz: Measurements and modeling”, *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC93)*, pp. 73–76, May 1993.
- [26] E. Fremouw & H. Bates, “Worldwide behavior of average VHF-UHF scintillation”, *radio Sci.*, vol. 6, pp. 863–869, October 1971.

- [27] D. W. Jordan & P. Smith, *Mathematical Techniques: An Introduction for the Engineering Physical, and Mathematical Sciences*, Oxford University press, 2<sup>nd</sup> edition, 1999.
- [28] I. Gradshteyn & I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 6<sup>th</sup> edition, 2000.
- [29] M. R. Spiegel, *Manual de Fórmulas, Métodos e Tabelas Matemáticas*, Makron Books, segunda edition, 2000, Traduzido por J. M. Silva.
- [30] M. Abramowitz & I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, 1972.
- [31] B. Sklar, “Defining, designing, and evaluating digital communication systems”, *IEEE Commun. Ma.*, vol. 31, no. 11, pp. 92–101, November 1993.
- [32] T. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*, Prentice Hall PTR, 2<sup>nd</sup> edition, 2002.
- [33] R. Ziemer & R. Peterson, *Introduction to Digital Communication*, Prentice-Hall PTR, 2<sup>nd</sup> edition, 2001.
- [34] A. M. Law & W. D. Kelton, *Simulations Modeling and Analysis*, McGraw-Hill Higher Education, 3<sup>rd</sup> edition, 2000.
- [35] B. L. Fox P. Bratley and L. E. Schrage, *A Guide to Simulation*, Springer, 2<sup>nd</sup> edition, 1987.
- [36] C. Ynoguti, “Probabilidade estatística e processos estocásticos”, Apostila de Mestrado, Instituto Nacional de Telecomunicações de Santa Rita do Sapucaí, 2001.