

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Comunicações

JOSÉ CÂNDIDO SILVEIRA SANTOS FILHO

COMBINAÇÃO POR GANHO IGUAL EM AMBIENTE COM DESVANECIMENTO ARBITRÁRIO

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub
DECOM/FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Leonardo Guerra de Rezende Guedes
Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Jaime Portugheis
DECOM/FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Ivanil Sebastião Bonatti
DT/FEEC/UNICAMP

Campinas
2003

Aos meus queridos pais, Cândido e Sônia
Dedico

Agradecimentos

Ao Prof. Michel Daoud Yacoub, pela amigável, competente e dedicada orientação.

Aos meus queridos pais, Cândido e Sônia, pelo afeto e pelo esforço dispensados em minha formação.

Aos colegas de faculdade, pelas valiosas críticas e sugestões na elaboração deste trabalho e, sobretudo, pelo companheirismo no dia-a-dia.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Pouco conhecimento faz com que as criaturas se sintam orgulhosas.
Muito conhecimento, com que se sintam humildes.
É assim que as espigas sem grãos erguem desdenhosamente a cabeça para o céu,
enquanto que as cheias a baixam para a terra, sua mãe.

Leonardo da Vinci

Sumário

Lista de Figuras	vi
Lista de Siglas	vii
Lista de Símbolos	viii
Resumo/Abstract	x
1 Introdução	1
1.1 Desvanecimento e Diversidade	1
1.1.1 Métodos de Combinação	2
1.2 Retrospecto da Combinação por Ganho Igual	3
1.3 Objetivos e Estrutura da Dissertação	4
2 Análise Geométrica da Combinação por Ganho Igual	7
2.1 Sinal Rádio-Móvel	7
2.1.1 Estatística da Envoltória	8
2.1.2 Estatística da Derivada Temporal da Envoltória	9
2.2 Combinação por Ganho Igual	10
2.2.1 Estatísticas da Envoltória e da Relação Sinal-Ruído	11
2.2.2 Confiabilidade e Relação Sinal-Ruído Média	12
2.2.3 Probabilidade de Erro	14
2.2.4 Estatísticas de Segunda Ordem	15
2.2.5 Limitante Inferior de Desempenho	17
2.3 Conclusão	17
3 Análise Freqüencial da Combinação por Ganho Igual	18
3.1 Estatísticas da Envoltória e da Relação Sinal-Ruído	18
3.2 Confiabilidade e Relação Sinal-Ruído Média	20

3.3	Probabilidade de Erro	21
3.4	Estatísticas de Segunda Ordem	21
3.5	Transformações de Fourier	22
3.6	Conclusão	23
4	Resultados Numéricos	25
4.1	Confiabilidade	25
4.2	Relação Sinal-Ruído Média	27
4.2.1	Uma Proposta de Combinação Dinâmica	27
4.3	Probabilidade de Erro	30
4.4	Estatísticas de Segunda Ordem	33
4.5	Conclusão	33
5	Considerações Finais	41
5.1	Investigações Futuras	42
	Referências Bibliográficas	44
A	Formulação Freqüencial Alternativa da Probabilidade de Erro para Modulações Binárias Coerentes	47
B	Soluções Fechadas para Canais Nakagami-m	49
B.1	Probabilidade de Erro de Modulações Binárias	49
B.1.1	Detecção Coerente	50
B.1.2	Detecção Não-Coerente	53
B.2	Estatísticas de Segunda Ordem	55
C	A Função NIntegrate	57
D	Artigos Publicados	59

Lista de Figuras

4.1	Confiabilidade; cenário iid.	28
4.2	Confiabilidade; desvanecimentos arbitrários ($M = 3$).	28
4.3	Confiabilidade; potências médias arbitrárias ($m_i = 1$).	29
4.4	Confiabilidade; desvanecimentos e potências médias arbitrários ($M = 3$).	29
4.5	M versus RSR média; cenário iid.	31
4.6	M versus RSR média; desvanecimentos arbitrários.	31
4.7	M versus RSR média; potências médias arbitrárias ($m_i = 1$).	32
4.8	M versus RSR média; desvanecimentos e potências médias arbitrários.	32
4.9	Probabilidade de erro; cenário iid.	34
4.10	Probabilidade de erro; desvanecimentos arbitrários ($M = 3$).	34
4.11	Probabilidade de erro; potências médias arbitrárias ($m_i = 1$).	35
4.12	Probabilidade de erro; desvanecimentos e potências médias arbitrários ($M = 3$).	35
4.13	Taxa de cruzamento de nível; cenário iid.	36
4.14	Taxa de cruzamento de nível; desvanecimentos arbitrários ($M = 3$).	36
4.15	Taxa de cruzamento de nível; potências médias arbitrárias ($m_i = 1$).	37
4.16	Taxa de cruzamento de nível; desvanecimentos e potências médias arbitrários ($M = 3$).	37
4.17	Duração média de desvanecimento; cenário iid.	38
4.18	Duração média de desvanecimento; desvanecimentos arbitrários ($M = 3$).	38
4.19	Duração média de desvanecimento; potências médias arbitrárias ($m_i = 1$).	39
4.20	Duração média de desvanecimento; desvanecimentos e potências médias arbitrários ($M = 3$).	39

Lista de Siglas

ASK	-	Amplitude-Shift Keying
BPSK	-	Binary Phase-Shift Keying
CDF	-	Função Distribuição de Probabilidade
CFSK	-	Coherent Frequency-Shift Keying
CGI	-	Combinação por Ganho Igual
CPSK	-	Coherent Phase-Shift Keying
CRM	-	Combinação por Razão Máxima
CSGI	-	Combinação por Seleção/Ganho Igual
CSL	-	Combinação por Seleção por Limiar
CSP	-	Combinação por Seleção Pura
CSRM	-	Combinação por Seleção/Razão Máxima
DMD	-	Duração Média de Desvanecimento
DPSK	-	Differential Phase-Shift Keying
FC	-	Função Característica
FSK	-	Frequency-Shift Keying
iid	-	Independentes e Identicamente Distribuídos
NUD	-	Não-Uso de Diversidade
PDF	-	Função Densidade de Probabilidade
PSK	-	Phase-Shift Keying
rms	-	Root Mean Square
RSR	-	Relação Sinal-Ruído
TCN	-	Taxa de Cruzamento de Nível
TF	-	Transformada de Fourier
VA	-	Variável Aleatória

Lista de Símbolos

M	-	Número de Ramos de Diversidade
r_i	-	Envoltória do i -ésimo Ramo
\hat{r}_i	-	Valor rms de r_i
ρ_i	-	Envoltória do i -ésimo Ramo, Normalizada em Relação a \hat{r}_i
$p(x)$	-	Função Densidade de Probabilidade da Variável Aleatória x
$P(x)$	-	Função Distribuição de Probabilidade da Variável Aleatória x
m_i	-	Parâmetro de Nakagami- m do i -ésimo Ramo
$E(\cdot)$	-	Média de uma Variável Aleatória
$\text{Var}(\cdot)$	-	Variância de uma Variável Aleatória
k_i	-	Parâmetro de Rice do i -ésimo Ramo
\dot{r}_i	-	Derivada Temporal de r_i
$\dot{\rho}_i$	-	Derivada Temporal de ρ_i
$p(x, y)$	-	Função Densidade de Probabilidade Conjunta das Variáveis Aleatórias x e y
σ_i	-	Desvio-Padrão de $\dot{\rho}_i$
f_m	-	Máximo Deslocamento Doppler em Hz
$\dot{\zeta}_i$	-	Desvio-Padrão de $\dot{\rho}_i$, Normalizado em Relação a πf_m
\mathcal{N}	-	Potência Média do Ruído em Cada Ramo
r	-	Envoltória na Saída do Combinador
\hat{r}_b	-	Valor rms de Referência da Envoltória
\tilde{r}_i	-	Valor rms de r_i , Normalizado em Relação a \hat{r}_b
γ	-	Relação Sinal-Ruído na Saída do Combinador
$\bar{\gamma}_i$	-	Relação Sinal-Ruído Média do i -ésimo Ramo
$\bar{\gamma}_b$	-	Relação Sinal-Ruído Média de Referência
$\tilde{\gamma}_i$	-	Relação Sinal-Ruído Média do i -ésimo Ramo, Normalizada em Relação a $\bar{\gamma}_b$
ρ	-	Envoltória na Saída do Combinador, Normalizada em Relação a \hat{r}_b
δ	-	Relação Sinal-Ruído na Saída do Combinador, Normalizada em Relação a $\bar{\gamma}_b$
$C(\gamma)$	-	Confiabilidade na Saída do Combinador
$\bar{\gamma}$	-	Relação Sinal-Ruído Média na Saída do Combinador
$\bar{\gamma}_{max}$	-	Relação Sinal-Ruído Média do Ramo com Maior Potência Média
P_b	-	Probabilidade de Erro de Bit
$P_b(\gamma)$	-	Probabilidade de Erro de Bit Condicional
$N(r)$	-	Taxa de Cruzamento de Nível na Saída do Combinador
\dot{r}	-	Derivada Temporal de r
$\dot{\sigma}$	-	Desvio-Padrão de \dot{r}

$T(r)$	-	Duração Média de Desvanecimento na Saída do Combinador
$\phi_i(\omega)$	-	Função Característica de ρ_i
$\phi(\omega)$	-	Função Característica de r
$\text{Re}[\cdot]$	-	Parte Real de um Número Complexo
$\phi_{P_b}(\omega)$	-	Transformada de Fourier de $P_b(\gamma = r^2)$
$\text{Im}[\cdot]$	-	Parte Imaginária de um Número Complexo
\hat{r}_{max}	-	Valor rms da Envoltória do Ramo de Maior Potência Média
λ	-	Fator de Decaimento Exponencial de Potência Média dos Ramos

Resumo

Esta dissertação provê uma análise exata, geral e unificada da combinação por ganho igual para um número genérico de ramos de diversidade com condições de desvanecimento e potências médias arbitrários. Salvo as estatísticas de segunda ordem, obtidas para os casos Nakagami- m e Rice, as formulações propostas se aplicam a qualquer modelo de desvanecimento. Os vários critérios de desempenho (confiabilidade, relação sinal-ruído média, probabilidade de erro, taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento) são formulados segundo abordagens geométrica e freqüencial. Esta última mostra-se superior — em precisão, convergência e velocidade de processamento — à medida que o número de ramos cresce. Tal superioridade advém da substituição de uma integral de convolução multidimensional por uma integral simples no domínio da freqüência. Exemplos numéricos revelam que a combinação por ganho igual é fortemente sensível aos efeitos deletérios do desbalanceamento de potência entre os ramos. Como resultado, o desempenho do combinador pode tornar-se inferior à do não-uso de diversidade e mesmo piorar com o aumento do número de ramos.

Palavras-chave: Ambiente com Desvanecimento Arbitrário; Combinação por Ganho Igual; Desvanecimento Nakagami- m ; Desvanecimento Rice; Diversidade.

Abstract

This dissertation provides an exact, general, and unified analysis of the equal-gain combining technique with a generic number of diversity branches having arbitrary mean powers and arbitrary fading parameters. Apart from the second-order statistics, developed for Nakagami- m and Rice fading, the derived expressions apply to any fading model. The various criteria of performance (reliability, mean signal-to-noise ratio, error rate, level crossing rate, and average fade duration) are formulated by means of geometrical and frequency-based approaches. The latter proves to be better — in precision, in convergency, and in computation speed — as the number of branches increases. Such a superiority results from the substitution of a multi-fold convolution integral by a single integral in the frequency domain. Numerical examples reveal that the equal-gain combining is strongly sensitive to the deleterious effects of the power imbalance among branches. As a result, it may perform worse than the non-diversity scheme and may even deteriorate as the number of branches increases.

Key-words: Arbitrary Fading Environment; Equal-Gain Combining; Nakagami- m Fading; Rice Fading; Diversity.

Capítulo 1

Introdução

A mobilidade garantiu aos sistemas de comunicação sem fio um nicho privilegiado no mercado mundial das telecomunicações e um crescimento vertiginoso nos últimos tempos. As novas gerações de sistemas trazem propostas ousadas, com altas taxas de transmissão integrando áudio, vídeo e dados. Em vista do acelerado avanço tecnológico, vislumbra-se uma rede sem fio global, provendo as mais remotas localidades de uma ampla gama de serviços, com total flexibilidade e transparência para os diversos tipos de usuários.

Eis um projeto de altíssimo custo. O desempenho dos sistemas sem fio é duramente penalizado pela natureza inconstante do canal rádio-móvel. Dentre as penas, o desvanecimento — flutuações aleatórias no sinal de rádio — é das mais severas. Um terminal móvel em ambiente urbano típico, por exemplo, pode sofrer variações extremas de sinal, sendo 40 dB abaixo do nível médio uma ocorrência não incomum. O estudo de técnicas que contornem os efeitos do desvanecimento é, portanto, crucial no projeto de sistemas de comunicação sem fio.

1.1 Desvanecimento e Diversidade

Tradicionalmente, classifica-se em dois tipos o desvanecimento. O efeito de sombreamento provocado por obstruções topográficas ou morfológicas de larga escala caracteriza o desvanecimento lento. O desvanecimento rápido decorre da propagação multipercorso, ou seja, da ação conjunta de múltiplas reflexões, espalhamentos e difrações do sinal rádio-móvel ao longo do seu trajeto aéreo.

Contornar os efeitos nocivos da propagação multipercorso é uma das difíceis tarefas no projeto de um sistema rádio-móvel. Há muitas técnicas de combate a esses efeitos. Combinação de diversidade, codificação e equalização adaptativa são exemplos representativos. A combinação de diversidade, presente em sistemas de comunicação desde os anos 20, é uma

técnica interessante por sua eficiência e relativa simplicidade de implementação.

O princípio de diversidade afirma que desvanecimentos em canais independentes são eventos independentes. Assim, se determinada informação é disponibilizada com redundância em um certo número M de canais (denominados *canais* ou *sinais* ou *ramos de diversidade*), a probabilidade de que seja afetada por um desvanecimento profundo, simultaneamente em todos os canais, é baixa. Por fim, combinando-se os sinais de informação dos diversos ramos com um algoritmo adequado (denominado *método de combinação*), obtém-se um sinal resultante menos deteriorado pelo desvanecimento do que os sinais de cada ramo individualmente.

1.1.1 Métodos de Combinação

A literatura costuma mencionar seis métodos de combinação, classificados em três grupos segundo o princípio de operação: combinação por seleção, combinação por adição e métodos híbridos. A combinação por seleção escolhe como saída um dos M sinais de diversidade, conforme algum critério. Na combinação por adição, o sinal resultante é uma combinação linear dos M sinais de diversidade. Uma mescla ocorre nos métodos híbridos: $1 \leq l \leq M$ sinais são selecionados e combinados adequadamente.

A seguir, apresenta-se uma breve descrição dos métodos de combinação.

Combinação por Seleção Pura (CSP)

Este método monitora continuamente os sinais de diversidade e seleciona sempre o melhor deles como saída. Teoricamente, maior relação sinal-ruído é o critério de seleção. Na prática, entretanto, a presença de ruído dificulta a estimativa da potência do sinal puro, e o ramo com maior potência de “sinal+ruído” é selecionado. A necessidade de um receptor para cada ramo de diversidade e de monitoramento dos sinais a uma taxa superior à da ocorrência de desvanecimento são limitações desta técnica.

Combinação por Seleção por Limiar (CSL)

A combinação por seleção por limiar tenta contornar as limitações da CSP, fazendo uma varredura seqüencial dos M ramos e selecionando o primeiro sinal de potência superior a um certo limiar. Enquanto se mantiver acima deste limiar, este sinal permanece na saída do combinador; caso contrário, reinicia-se o processo de varredura. O desempenho deste método é o pior dentre todos e bastante dependente do limiar escolhido. O limiar ótimo, por sua vez, relaciona-se estreitamente às estatísticas da potência dos sinais de diversidade. Tais restrições conferem pouca utilidade prática à CSL.

Combinação por Ganho Igual (CGI)

O sinal resultante da combinação por ganho igual é a soma coerente dos M sinais de diversidade. Faz-se necessário, portanto, circuitaria para igualamento das fases dos ramos. Tal necessidade inexistente nos métodos de seleção. Apesar disto, a simplicidade de implementação e a eficiência são marcas registradas da CGI. Ela se aproxima do desempenho da combinação ótima (descrita a seguir), mesmo sendo substancialmente menos complexa.

Combinação por Razão Máxima (CRM)

A combinação por razão máxima realiza uma soma ponderada dos sinais de diversidade, onde o coeficiente de ponderação de cada ramo é proporcional à razão entre o valor do seu sinal e a potência média do ruído correspondente. Este método resulta na combinação ótima, atingindo o limite máximo teórico de ganho com uso de diversidade. O desempenho ideal não é atingido na prática, devido a erros na estimativa dos ganhos de cada ramo. Recentes avanços na área de processamento digital de sinais, no entanto, impulsionaram o uso da CRM em sistemas atuais envolvendo receptores RAKE e *arrays* de antenas.

Combinação por Seleção/Ganho Igual (CSGI)

Os métodos híbridos foram propostos recentemente visando a incorporar o bom desempenho dos métodos de adição a um esquema simplificado. A idéia é selecionar os $1 \leq l \leq M$ sinais de maior relação sinal-ruído e combiná-los com um dos métodos de adição. A redução do número de entradas do estágio somador simplifica a implementação, apesar da introdução de um estágio seletor. Na combinação por seleção/ganho igual, o estágio somador emprega a técnica CGI.

Combinação por Seleção/Razão Máxima (CSRM)

A combinação por seleção/razão máxima diferencia-se da CSGI por apresentar um estágio somador do tipo CRM. A simplificação obtida com um menor número de estimativas de canal (l em vez de M) para determinar os ganhos dos ramos pode compensar o custo introduzido pelo estágio seletor.

1.2 Retrospecto da Combinação por Ganho Igual

A técnica CGI desperta especial interesse por apresentar um desempenho comparável ao da combinação ótima CRM e uma implementação bem mais simples do que esta. No entanto,

a literatura abriga uma coleção relativamente escassa de publicações sobre CGI, comparando-se aos outros métodos de combinação. Tal escassez advém da complexidade da modelagem exata para a função densidade de probabilidade (PDF) da saída do combinador CGI, que envolve a soma de M envoltórias desvanecidas. Sob hipótese de ramos independentes (comum na literatura e também feita nesta dissertação), esta modelagem resulta numa convolução M -dimensional das PDFs dos ramos. Uma solução fechada exata para este problema tem sido perseguida por mais de 80 anos (remontando à época de Lord Rayleigh), mas ainda não se obteve êxito nem mesmo para a mais simples condição de desvanecimento (Rayleigh) com $M > 2$. Não há soluções fechadas exatas para os ambientes Rice e Nakagami- m [1], com exceção deste último para apenas dois ramos de diversidade independentes e identicamente distribuídos (iid), resultado recém-publicado [2].

Soluções aproximadas têm sido desenvolvidas para contornar o ônus da modelagem exata. Em [3], uma técnica envolvendo séries infinitas é proposta para computar a PDF e a função distribuição de probabilidade (CDF) da soma de variáveis aleatórias (VAs) Rayleigh independentes. Adaptações desta técnica para desvanecimentos Nakagami- m e Rice ocorrem em [4] e [5], respectivamente. Embora acurada, a técnica é uma aproximação, sujeita a erros de truncamento; um método simples para limitar tais erros é discutido em [6]. Recentemente, propôs-se uma abordagem semi-analítica, via integração numérica, para o cálculo da CDF da soma ponderada de M variáveis independentes Nakagami- m ou Rice [7]. A solução aparece de forma recursiva, provendo acurácia e rapidez apenas para $M < 4$.

Dada a inexistência de solução fechada, o cálculo exato das funções estatísticas da soma de VAs desvanecidas independentes exige integração (convolução) numérica multidimensional. Uma abordagem geométrica, utilizada em [8] para o cálculo da CDF da soma de variáveis Rayleigh iid, permite reduzir a região de integração ao volume M -dimensional delimitado pelo hiperplano referente à equação de soma que define a técnica CGI, diminuindo o esforço computacional. Em [9, 10], tal abordagem é estendida para o cálculo da PDF e da CDF da soma de envoltórias Nakagami- m iid. Doravante, este método [9, 10] denomina-se geométrico.

1.3 Objetivos e Estrutura da Dissertação

Na prática, os canais de diversidade são arbitrários, ou seja, com potências médias e condições de desvanecimento quaisquer. O primeiro objetivo deste trabalho é generalizar, para canais arbitrários, a análise geométrica da CGI feita em [9, 10]. Infelizmente, os cálculos numéricos deste tipo de análise são ainda extremamente custosos e suscetíveis a problemas de convergência; a situação se agrava rapidamente com a elevação do número de ramos de diversidade.

Como tentativa de contornar este inconveniente surge o segundo objetivo deste trabalho: reformular a análise da CGI no espaço transformado de Fourier. Resultado bastante conhecido, a convolução mapeia-se num produto no domínio da frequência. Assim sendo, a convolução M -dimensional para o cálculo da densidade da saída do combinador CGI é mapeada numa integral simples (a antitransformada de Fourier) envolvendo o produto das transformadas de Fourier (TFs) das densidades de cada ramo. Tais transformadas são conhecidas da literatura para os modelos de desvanecimento comumente usados e, de fato, já existem trabalhos abordando cálculos de probabilidade de erro pela técnica do domínio transformado [1, 11, 12]. No entanto, expressões para confiabilidade, relação sinal-ruído média e estatísticas de segunda ordem não se encontram formuladas ainda. Esta dissertação estende o uso da transformação de Fourier no estudo da CGI, investigando as lacunas e sistematizando resultados já conhecidos. Além disso, o contexto considerado é bastante geral: M envoltórias independentes, desbalanceadas (potências médias quaisquer) e arbitrariamente desvanecidas. Os desvanecimentos podem diferir em grau e modelo. Incluem-se, neste trabalho, os modelos Rice e Nakagami- m de desvanecimento. Com exceção das estatísticas de segunda ordem, entretanto, as formulações aqui obtidas se aplicam a qualquer modelo de desvanecimento.

O restante da dissertação está estruturado da seguinte forma:

Capítulo 2 Generalização da análise geométrica da CGI apresentada em [9, 10], considerando ramos de potências médias quaisquer e condições arbitrárias de desvanecimento. Obtêm-se expressões para a PDF e para a CDF da envoltória e da relação sinal-ruído (RSR) na saída do combinador, bem como para a RSR média. Derivam-se daí a confiabilidade, a probabilidade de erro, a taxa de cruzamento de nível (TCN) e a duração média de desvanecimento (DMD). Apresenta-se um limitante inferior de desempenho para a técnica CGI.

Capítulo 3 Análise freqüencial da CGI. Cada expressão do capítulo 2 é mapeada no domínio da frequência. Apresentam-se as transformações de Fourier das PDFs de canais Nakagami- m e Rice e da probabilidade de erro condicional de técnicas de modulação binária.

Capítulo 4 Resultados numéricos e análise das formulações desenvolvidas nos capítulos anteriores, para canais Nakagami- m . Discutem-se os efeitos do número de ramos, do desbalanceamento de potência e das condições arbitrárias de desvanecimento sobre o desempenho CGI. Uma versão dinâmica do combinador por ganho igual é proposta, a fim de maximizar a RSR média pela combinação de um subconjunto dos sinais de diversidade.

Capítulo 5 Considerações finais e perspectivas de investigações futuras.

Apêndice A Formulação frequencial alternativa da probabilidade de erro para modulações binárias coerentes, baseada numa representação integral exponencial conveniente da função erro complementar.

Apêndice B Soluções fechadas para probabilidade de erro e para estatísticas de segunda ordem da combinação por ganho igual de canais Nakagami- m , com diversidade de segunda e terceira ordens.

Apêndice C Breve descrição da função `NIntegrate` do software `Mathematica`, utilizada na avaliação numérica das integrais presentes nas formulações obtidas neste trabalho.

Apêndice D Artigos publicados durante o programa de mestrado.

Capítulo 2

Análise Geométrica da Combinação por Ganho Igual

Simples e eficaz, a técnica de combinação por ganho igual é um instrumento atrativo de combate ao desvanecimento rápido. Seu desempenho segue de perto o da combinação ótima CRM. Entretanto, sua análise matemática é bastante complicada. A abordagem geométrica descrita em [9, 10] formula a densidade na saída do combinador CGI como uma integração multidimensional da densidade conjunta das envoltórias dos ramos de diversidade. Em se tratando de ramos independentes, obtém-se a convolução M -dimensional das densidades individuais. A solução não é fechada e os cálculos numéricos estão sujeitos a má convergência e a imprecisões.

Este capítulo revisita a estratégia geométrica de análise da CGI, generalizando-a para um cenário onde os ramos de diversidade são desbalanceados e arbitrariamente desvanecidos. Antes disso, caracterizam-se os modelos de desvanecimento Nakagami- m e Rice abordados na dissertação.

2.1 Sinal Rádio-Móvel

O nível médio do sinal rádio-móvel é fundamentalmente determinado pela perda no espaço livre somada às perdas introduzidas pela topografia e morfologia do ambiente de propagação. No entanto, a mobilidade introduz uma gama de fatores que desviam o sinal de sua média local dinamicamente. Infundáveis obstruções atenuam, refletem, espalham e difratam o sinal rádio-móvel diferentemente no caminho entre transmissor e receptor; e este processo varia no tempo.

2.1.1 Estatística da Envoltória

Em vista da aleatoriedade do conjunto de eventos envolvidos em sua propagação, o sinal rádio-móvel é comumente modelado de forma estatística. Dois consagrados modelos estatísticos para o desvanecimento rápido da envoltória do sinal rádio-móvel são abordados neste trabalho: Nakagami- m e Rice. Ambos incluem a distribuição Rayleigh — mais simples condição de desvanecimento — como um caso particular.

Nakagami- m

A distribuição Nakagami- m [13] descreve a variação rápida da envoltória do sinal rádio-móvel em um ambiente multipercurso onde as ondas espalhadas atingem o receptor em *clusters*. A PDF $p(\rho_i)$ da envoltória Nakagami- m normalizada $\rho_i = r_i/\hat{r}_i$, onde r_i é a envoltória do sinal e $\hat{r}_i = \sqrt{\mathbb{E}(r_i^2)}$ o seu valor rms (*root mean square*), é dada por¹

$$p(\rho_i) = \frac{2m_i^{m_i}}{\Gamma(m_i)} \rho_i^{2m_i-1} \exp(-m_i\rho_i^2) \quad (2.1)$$

sendo $m_i = \mathbb{E}^2(r_i^2)/\text{Var}(r_i^2)$ o parâmetro de Nakagami e $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ a função gama. Observe que $\mathbb{E}(\cdot)$ e $\text{Var}(\cdot)$ são operadores de média e variância, respectivamente. Para $m_i = 1$, tem-se a condição Rayleigh. Os momentos de ordem $n \geq 0$ da envoltória Nakagami- m normalizada valem

$$\mathbb{E}(\rho_i^n) = \frac{\Gamma(m_i + \frac{n}{2})}{m_i^{n/2}\Gamma(m_i)} \quad (2.2)$$

A CDF da envoltória Nakagami- m normalizada é dada por

$$P(\rho_i) = \frac{\Gamma(m_i, m_i\rho_i^2)}{\Gamma(m_i)} \quad (2.3)$$

onde $\Gamma(a, b) = \int_0^b x^{a-1}e^{-x}dx$ é a função gama incompleta.

Rice

A distribuição Rice [14] descreve a variação rápida da envoltória do sinal rádio-móvel em um ambiente multipercurso onde uma componente predominante (componente direta)

¹Neste trabalho, $p(x)$ e $P(x)$ correspondem à PDF e à CDF da VA x , respectivamente. O sub-índice i denota o i -ésimo ramo de diversidade. Como, por hipótese, a envoltória de cada ramo é uma VA Nakagami- m ou Rice, parece razoável estender o uso do sub-índice à descrição estatística de tais VAs e de suas derivadas temporais. A ausência de sub-índice indica se tratar da saída do combinador, salvo explicitação em contrário.

se soma às ondas espalhadas uniformemente distribuídas em torno do receptor. A PDF da envoltória Rice normalizada ρ_i é dada por

$$p(\rho_i) = \frac{2(1+k_i)}{\exp(k_i)} \rho_i \exp(-(1+k_i)\rho_i^2) I_0\left(2\sqrt{k_i(1+k_i)}\rho_i\right) \quad (2.4)$$

sendo k_i o parâmetro de Rice, obtido como a razão entre a potência da componente direta e a potência total das ondas espalhadas, e $I_0(z) = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} \exp(z \cos \theta) d\theta$ a função de Bessel modificada de primeiro tipo e ordem zero. Para $k_i = 0$, tem-se a condição Rayleigh. Os momentos de ordem $n \geq 0$ da envoltória Rice normalizada valem

$$E(\rho_i^n) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{\exp(k_i)(1+k_i)^{n/2}} {}_1F_1\left(1 + \frac{n}{2}; 1; k_i\right) \quad (2.5)$$

onde

$${}_1F_1(a; b; c) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(a)_i c^i}{(b)_i i!} \quad (2.6)$$

é a função hipergeométrica confluyente de primeiro tipo e $(a)_i = \Gamma(a+i)/\Gamma(a)$ é o símbolo de Pochhammer. A CDF da envoltória Rice normalizada é dada por

$$P(\rho_i) = 1 - Q\left(\sqrt{2k_i}, \sqrt{2(1+k_i)}\rho_i\right) \quad (2.7)$$

onde $Q(a, b) = \int_b^{\infty} x \exp(-(x^2 + a^2)/2) I_0(ax) dx$ é a função Marcum Q.

2.1.2 Estatística da Derivada Temporal da Envoltória

Em [14] e [15], para desvanecimentos Rice e Nakagami- m , respectivamente, prova-se que:

- A envoltória r_i e sua derivada temporal \dot{r}_i são variáveis aleatórias independentes, ou seja, a densidade conjunta² $p(r_i, \dot{r}_i)$ de r_i e \dot{r}_i é dada por $p(r_i, \dot{r}_i) = p(r_i)p(\dot{r}_i)$;
- A derivada temporal \dot{r}_i é uma variável Gaussiana de média nula.

Assim, a densidade $p(\dot{\rho}_i)$ da derivada temporal $\dot{\rho}_i$ da envoltória normalizada ρ_i é dada por

$$p(\dot{\rho}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\dot{\sigma}_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}_i}{\dot{\sigma}_i}\right)^2\right) \quad (2.8)$$

onde o desvio-padrão $\dot{\sigma}_i$ vale [14, 15]

$$\dot{\sigma}_i = \dot{\zeta}_i \pi f_m \quad (2.9)$$

²A função $p(x, y)$ denota a PDF conjunta das VAs x e y .

sendo f_m o máximo deslocamento Doppler em Hz e

$$\dot{\zeta}_i = \begin{cases} 1/\sqrt{m_i} & , \text{ Nakagami-}m \\ 1/\sqrt{k_i + 1} & , \text{ Rice} \end{cases} \quad (2.10)$$

Observe que $\dot{\zeta}_i$ é função apenas do parâmetro de desvanecimento da envoltória. Para desvanecimento Rayleigh ($m_i = 1$ ou $k_i = 0$), $\dot{\zeta}_i = 1$.

2.2 Combinação por Ganho Igual

Este trabalho considera um número genérico M de ramos de diversidade independentes, com potências médias distintas e parâmetros arbitrários de desvanecimento, incluindo-se os modelos Nakagami- m e Rice. Os ruídos nos ramos são processos Gaussianos estacionários independentes, aditivos, de média nula e mesma potência média \mathcal{N} .

É conveniente desmembrar a envoltória r_i do i -ésimo ramo, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, em dois componentes como

$$r_i = \hat{r}_i \rho_i \quad (2.11)$$

separando o elemento determinístico potência média $E(r_i^2/2) = \hat{r}_i^2/2$ da figura estocástica de desvanecimento embutida na distribuição da envoltória normalizada ρ_i do ramo.

A combinação por ganho igual efetua a soma coerente dos M sinais de diversidade. Neste processo, os ruídos dos ramos se somam incoerentemente, de modo que a potência média do ruído na saída do combinador vale $M\mathcal{N}$. Normalizando-se a soma dos ramos por \sqrt{M} , tem-se então, na saída do combinador, um ruído de potência \mathcal{N} igual à do ruído em cada ramo. Tal referência fornece uma base de comparação entre o desempenho da CGI e aquele relativo ao não-uso de diversidade (NUD). Conseqüentemente, e com uso de (2.11), a envoltória r na saída do combinador resulta em

$$r = \frac{\sum_{i=1}^M r_i}{\sqrt{M}} = \frac{\sum_{i=1}^M \hat{r}_i \rho_i}{\sqrt{M}} = \frac{\hat{r}_b}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i \rho_i \quad (2.12)$$

sendo \hat{r}_b um certo valor-base rms (valor de referência) e $\tilde{r}_i \triangleq \hat{r}_i/\hat{r}_b$ o valor rms do i -ésimo ramo normalizado em relação a \hat{r}_b . Tal normalização proporciona um formato mais didático às funções estatísticas da envoltória CGI obtidas na próxima seção. Um procedimento análogo é aplicado à RSR, descrita a seguir.

A partir de (2.12), a relação sinal-ruído $\gamma = r^2/(2\mathcal{N})$ na saída do combinador pode ser

escrita como

$$\gamma = \frac{\left(\sum_{i=1}^M \hat{r}_i \rho_i\right)^2}{2M\mathcal{N}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i} \rho_i\right)^2}{M} = \left(\sqrt{\frac{\tilde{\gamma}_b}{M}} \sum_{i=1}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i} \rho_i\right)^2 \quad (2.13)$$

onde $\tilde{\gamma}_i = E(r_i^2/(2\mathcal{N})) = \hat{r}_i^2/2\mathcal{N}$ é a RSR média do i -ésimo ramo, $\tilde{\gamma}_b = \hat{r}_b^2/2\mathcal{N}$ é a RSR média de referência e $\tilde{\gamma}_i \triangleq \tilde{\gamma}_i/\tilde{\gamma}_b$ é a RSR do i -ésimo ramo normalizada em relação a $\tilde{\gamma}_b$. Combinando-se (2.12) e (2.13), a relação entre γ e r pode ser reformulada como

$$\gamma = r^2 \quad (2.14)$$

com $\hat{r}_b = \sqrt{\tilde{\gamma}_b}$ e $\tilde{r}_i = \sqrt{\tilde{\gamma}_i}$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$. Esta reformulação é de suma importância na análise GCI, visto que simplifica a transformação entre as VAs γ e r ao eliminar passos intermediários envolvendo a potência média \mathcal{N} do ruído.

Nos exemplos numéricos do capítulo 4, adota-se como valor-base \hat{r}_b o maior dentre os valores rms dos ramos. Isso permite comparar o desempenho CGI ao do NUD mais otimista, definido pelo uso do canal de maior potência média.

2.2.1 Estatísticas da Envoltória e da Relação Sinal-Ruído

Esta seção generaliza o cálculo da PDF e da CDF da soma de VAs Nakagami- m iid apresentado em [9, 10], ao englobar potências distintas e desvanecimentos arbitrários para os sinais de diversidade.

A hipótese de independência estatística implica que a densidade de probabilidade conjunta $p(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M)$ das envoltórias normalizadas ρ_i dos ramos de diversidade é dada pelo produto das densidades individuais:

$$p(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M) = \prod_{i=1}^M p(\rho_i) \quad (2.15)$$

Do ponto de vista geométrico, a CDF da soma de variáveis aleatórias não-negativas — como a envoltória rádio-móvel — pode ser calculada pela integração da densidade conjunta das variáveis no volume limitado pelos hiperplanos definidos pela equação de soma e pelos eixos de cada variável [8, 9]. Tal estratégia, aplicada à equação de soma CGI (2.12), fornece a

distribuição $P(r)$ da envoltória r na saída do combinador como

$$P(r) = \frac{1}{\prod_{i=1}^M \tilde{r}_i} \int_0^{\rho\sqrt{M}} \int_0^{\rho\sqrt{M}-r_M} \cdots \int_0^{\rho\sqrt{M}-\sum_{i=3}^M r_i} \int_0^{\rho\sqrt{M}-\sum_{i=2}^M r_i} p\left(\frac{r_1}{\tilde{r}_1}, \frac{r_2}{\tilde{r}_2}, \dots, \frac{r_M}{\tilde{r}_M}\right) dr_1 dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (2.16)$$

onde $\rho = r/\hat{r}_b$. Derivando-se (2.16) em relação a r , tem-se a PDF da envoltória CGI:

$$p(r) = \frac{\sqrt{M}}{\hat{r}_b \prod_{i=1}^M \tilde{r}_i} \int_0^{\rho\sqrt{M}} \int_0^{\rho\sqrt{M}-r_M} \cdots \int_0^{\rho\sqrt{M}-\sum_{i=3}^M r_i} p\left(\frac{\rho\sqrt{M}-\sum_{i=2}^M r_i}{\tilde{r}_1}, \frac{r_2}{\tilde{r}_2}, \dots, \frac{r_M}{\tilde{r}_M}\right) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (2.17)$$

Em (2.16) e (2.17), a densidade de probabilidade $p(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$ corresponde à PDF conjunta das envoltórias normalizadas, expressa em (2.15). Esta observação vale também para o restante do texto.

Uma simples transformação de variável, dada por (2.14), permite obter as estatísticas da relação sinal-ruído γ na saída do combinador:

$$P(\gamma) = \frac{1}{\prod_{i=1}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i}} \int_0^{\sqrt{M\delta}} \int_0^{\sqrt{M\delta}-r_M} \cdots \int_0^{\sqrt{M\delta}-\sum_{i=3}^M r_i} \int_0^{\sqrt{M\delta}-\sum_{i=2}^M r_i} p\left(\frac{r_1}{\sqrt{\tilde{\gamma}_1}}, \frac{r_2}{\sqrt{\tilde{\gamma}_2}}, \dots, \frac{r_M}{\sqrt{\tilde{\gamma}_M}}\right) dr_1 dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (2.18)$$

e

$$p(\gamma) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{\gamma\tilde{\gamma}_b}} \frac{1}{\prod_{i=1}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i}} \int_0^{\sqrt{M\delta}} \int_0^{\sqrt{M\delta}-r_M} \cdots \int_0^{\sqrt{M\delta}-\sum_{i=3}^M r_i} p\left(\frac{\sqrt{M\delta}-\sum_{i=2}^M r_i}{\sqrt{\tilde{\gamma}_1}}, \frac{r_2}{\sqrt{\tilde{\gamma}_2}}, \dots, \frac{r_M}{\sqrt{\tilde{\gamma}_M}}\right) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \quad (2.19)$$

onde $\delta = \gamma/\tilde{\gamma}_b$. Observe que a distribuição da RSR depende apenas das razões $\gamma/\tilde{\gamma}_b$ e $\tilde{\gamma}_i/\tilde{\gamma}_b$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, e não do valor absoluto da RSR de cada ramo de diversidade.

2.2.2 Confiabilidade e Relação Sinal-Ruído Média

A *confiabilidade* $C(\gamma)$ é definida como a probabilidade de a RSR na saída do combinador exceder um dado valor γ . Assim sendo, $C(\gamma) = 1 - P(\gamma)$, com $P(\gamma)$ dado por (2.18). Outro

importante critério de desempenho no estudo dos métodos de combinação é a RSR média na saída, $\bar{\gamma} = E(\gamma)$. A partir de (2.13), tem-se que

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} &= \frac{\bar{\gamma}_b}{M} \left[E \left(\sum_{i=1}^M \tilde{\gamma}_i \rho_i^2 \right) + E \left(\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j} \rho_i \rho_j \right) \right] \\ &= \frac{\bar{\gamma}_b}{M} \left[\sum_{i=1}^M \tilde{\gamma}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^M \sqrt{\tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j} E(\rho_i) E(\rho_j) \right]\end{aligned}\quad (2.20)$$

Os momentos $E(\rho_i)$ de VAs Nakagami- m e Rice são dados por (2.2) e (2.5) com $n = 1$ e satisfazem respectivamente $\sqrt{2/\pi} \leq E(\rho_i) \leq 1$ e $\sqrt{\pi}/2 \leq E(\rho_i) \leq 1$, para $1/2 \leq m_i < \infty$ e $1/2 \leq k_i < \infty$. Ambos aumentam de valor, monotonicamente, à medida que o canal melhora, ou seja, que o parâmetro de desvanecimento (m_i ou k_i) cresce. Daí o aumento invariável do ganho CGI com a redução da severidade dos canais de diversidade. Para ambientes Nakagami- m e Rice iid, (2.20) simplifica-se, respectivamente, para

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_i \left\{ 1 + (M - 1) \frac{\Gamma^2 \left(m_i + \frac{1}{2} \right)}{m_i \Gamma^2(m_i)} \right\}\quad (2.21)$$

e

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_i \left\{ 1 + (M - 1) \frac{\pi}{4(1 + k_i)} e^{-k_i} \left[\left(1 + k_i \right) I_0 \left(\frac{k_i}{2} \right) + k_i I_1 \left(\frac{k_i}{2} \right) \right]^2 \right\}\quad (2.22)$$

Vale aqui ressaltar que (2.20) engloba modelos quaisquer e graus distintos de desvanecimento para os ramos de diversidade, desde que se conheçam os momentos de primeira ordem $E(\rho_i)$ das envoltórias.

A partir de (2.20), podem-se determinar os limitantes de desempenho para a RSR média CGI. A fim de se estabelecer o desempenho do NUD mais otimista (uso do canal de maior potência média) como referência, seja $\bar{\gamma}_b = \bar{\gamma}_{\max}$, onde $\bar{\gamma}_{\max}$ é a maior RSR média dentre todos os ramos. Isto implica que $\tilde{\gamma}_i \leq 1$. Em melhor caso, os sinais são balanceados ($\tilde{\gamma}_i = 1$) e determinísticos ($m_i \rightarrow \infty$ ou $k_i \rightarrow \infty$), $i \in \{1, 2, \dots, M\}$. Assim, (2.20) simplifica-se para

$$\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_{\max}} = M\quad (2.23)$$

ou seja, a CGI se comporta como a CRM, esquema ótimo de combinação. Em pior caso, apenas um ramo de diversidade possui sinal não-nulo, sendo $\tilde{\gamma}_i = 0$ para os demais ramos.

Resulta, então, que

$$\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_{max}} = \frac{1}{M} \quad (2.24)$$

ou seja, o desempenho CGI decai com o aumento do número de ramos. Note que estes limitantes dependem exclusivamente do número de ramos considerado. Portanto, na prática, o ganho CGI em RSR média vale $1/M \leq \bar{\gamma}/\bar{\gamma}_{max} \leq M$. Isto indica que o desempenho da técnica pode ser pior que aquele obtido pelo uso isolado do canal de maior potência média (NUD mais otimista), sendo, neste caso, prejudicial o emprego da CGI.

2.2.3 Probabilidade de Erro

As redes sem fio têm acompanhado a tendência mundial das telecomunicações rumo à digitalização. Em transmissão digital, um importante critério de desempenho é a *probabilidade de erro de bit* (P_b). Uma estratégia eficiente para reduzir P_b em canais com desvanecimento é a combinação de diversidade.

Considerando a presença de ruído gaussiano aditivo estacionário, a probabilidade de erro de bit depende apenas da relação sinal-ruído γ associada ao sinal rádio-móvel [16], comumente normalizada em relação ao bit na forma da razão entre a energia média por bit e a potência média do ruído. Assim, para cada esquema de modulação digital, dado γ , há uma função — a probabilidade de erro condicional $P_b(\gamma)$ — que fornece a taxa de erro correspondente³. A fim de se obter a probabilidade de erro de bit P_b , deve-se então fazer a média de $P_b(\gamma)$ sobre a densidade $p(\gamma)$

$$P_b = \int_0^{\infty} P_b(\gamma)p(\gamma)d\gamma \quad (2.25)$$

Em vista da relação (2.14), (2.25) pode ser convenientemente reformulada como

$$P_b = \int_0^{\infty} P_b(\gamma = r^2)p(r)dr \quad (2.26)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{r} P_b(\gamma = \ln^2 r) p(r = -\ln r)dr \quad (2.27)$$

Naturalmente, as substituições $\hat{r}_b = \sqrt{\gamma_b}$ e $\tilde{r}_i = \sqrt{\gamma_i}$, $i \in \{1, 2, \dots, M\}$, responsáveis pela equivalência (2.14), devem ser aplicadas sobre $p(r)$. Na passagem de (2.26) para (2.27), faz-se uma substituição de variável do tipo $y = \exp(-r)$ (renomeando-se, em seguida, y como r), a fim de se evitar o limite superior infinito da equação original, propenso a má convergência numérica.

³As probabilidades de erro condicional $P_b(\gamma)$ para diversos esquemas de modulação digital encontram-se listadas amplamente na literatura [1, 11]. O capítulo 3 apresenta $P_b(\gamma)$ para modulações binárias convencionais.

Substituindo-se (2.17) em (2.27), obtém-se a probabilidade de erro de bit na saída do combinador CGI para qualquer esquema de modulação cuja taxa de erro condicional $P_b(\gamma)$ seja conhecida.

2.2.4 Estatísticas de Segunda Ordem

Em sistemas de transmissão digital, a propagação multipercurso provoca blocos de erro quando o sinal cai abaixo de um certo nível. O uso de técnicas de combinação de diversidade permite reduzir as ocorrências de desvanecimentos, elevando o nível médio do sinal rádio-móvel. Deste modo, o sinal resultante cruza baixos níveis a taxas menores e altos níveis a taxas maiores, à medida que o número de ramos de diversidade aumenta. Estimar a taxa de ocorrência e a duração média de tais desvanecimentos é, portanto, de grande interesse prático.

Taxa de Cruzamento de Nível

A taxa de cruzamento de nível $N(r)$ é definida como a taxa temporal com que a envoltória cruza um certo valor r numa mesma direção (positiva, por exemplo). Estima-se $N(r)$ como [14]

$$N(r) = \int_0^{\infty} \dot{r} p(r, \dot{r}) d\dot{r} \quad (2.28)$$

onde $p(r, \dot{r})$ é a densidade conjunta da envoltória r e sua derivada temporal \dot{r} .

Derivando-se (2.12) em relação ao tempo, tem-se \dot{r} na saída do combinador CGI

$$\dot{r} = \frac{\hat{r}_b}{\sqrt{M}} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i \dot{\rho}_i \quad (2.29)$$

Em [10], demonstra-se que as VAs ρ_i e $\dot{\rho}_j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$, são independentes. (Observe que isto inclui o caso $i = j$, como apresenta a seção 2.1.2.) A envoltória r é uma combinação linear das VAs ρ_i (vide (2.12)); (2.29) estabelece igual relação entre \dot{r} e as VAs $\dot{\rho}_i$. Assim, r e \dot{r} também apresentam independência estatística, tal que

$$p(r, \dot{r}) = p(r)p(\dot{r}) \quad (2.30)$$

Sendo ρ_i e ρ_j independentes por hipótese, $\dot{\rho}_i$ e $\dot{\rho}_j$ também o são, uma vez que a derivada é um operador linear. Assim, \dot{r} constitui uma soma ponderada de Gaussianas independentes de médias nulas, resultando numa gaussiana de média nula com variância igual à soma das

variâncias de cada termo. Usando-se (2.9) em (2.29), o desvio padrão $\dot{\sigma}$ de \dot{r} vale então

$$\dot{\sigma} = \pi f_m \hat{r}_b \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i^2 \zeta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

Para o caso iid, (2.31) fornece $\dot{\sigma} = \hat{r}_i \dot{\sigma}_i$, ou seja, a densidade da derivada da envoltória CGI é idêntica à da derivada da envoltória de qualquer dos ramos de diversidade. Tal afirmação coincide com os resultados de [9, 10]. (Lembre-se de que $\dot{\sigma}_i$ é o desvio padrão de $\dot{\rho}_i$; o desvio padrão de \dot{r}_i vale, pois, $\hat{r}_i \dot{\sigma}_i$.)

O uso de (2.17), (2.30) e (2.31) em (2.28) fornece a expressão geral para a taxa de cruzamento de nível da CGI com M canais arbitrários

$$\begin{aligned} N(r) &= p(r) \int_0^\infty \dot{r} p(\dot{r}) d\dot{r} \\ &= p(r) \frac{\dot{\sigma}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} &= f_m \frac{1}{\prod_{i=1}^M \tilde{r}_i} \left(\frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i^2 \zeta_i^2 \right)^{1/2} \int_0^{\rho\sqrt{M}} \int_0^{\rho\sqrt{M}-r_M} \cdots \int_0^{\rho\sqrt{M}-\sum_{i=3}^M r_i} \\ & p \left(\frac{\rho\sqrt{M} - \sum_{i=2}^M r_i}{\tilde{r}_1}, \frac{r_2}{\tilde{r}_2}, \dots, \frac{r_M}{\tilde{r}_M} \right) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M \end{aligned} \quad (2.33)$$

A relação (2.32) é de suma importância. Expressa a TCN como a PDF da envoltória CGI ponderada pelo desvio padrão de sua derivada temporal.

Duração Média de Desvanecimento

A duração média de desvanecimento $T(r)$ é definida como o tempo médio que a envoltória permanece abaixo de um certo nível r , sendo obtida como [14]

$$T(r) = \frac{P(r)}{N(r)} \quad (2.34)$$

Substituindo-se (2.16) e (2.33) em (2.34), chega-se à formulação geral da duração média de desvanecimento da CGI com M canais arbitrários

$$\begin{aligned} T(r) &= \frac{1}{f_m} \left(\frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i^2 \zeta_i^2 \right)^{-1/2} \frac{\int_0^{\rho\sqrt{M}} \int_0^{\rho\sqrt{M}-r_M} \cdots \int_0^{\rho\sqrt{M}-\sum_{i=3}^M r_i} \int_0^{\rho\sqrt{M}-\sum_{i=2}^M r_i} \\ & p \left(\frac{r_1}{\tilde{r}_1}, \frac{r_2}{\tilde{r}_2}, \dots, \frac{r_M}{\tilde{r}_M} \right) dr_1 dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M}{\int_0^{\rho\sqrt{M}} \int_0^{\rho\sqrt{M}-r_M} \cdots \int_0^{\rho\sqrt{M}-\sum_{i=3}^M r_i} \\ & p \left(\frac{\rho\sqrt{M}-\sum_{i=2}^M r_i}{\tilde{r}_1}, \frac{r_2}{\tilde{r}_2}, \dots, \frac{r_M}{\tilde{r}_M} \right) dr_2 \cdots dr_{M-1} dr_M} \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.2.5 Limitante Inferior de Desempenho

No mais pessimista dos cenários, apenas um ramo de diversidade possui sinal; nos outros, há ruído puro. Seja s o índice do ramo com sinal. Fazendo-se $\tilde{r}_i = 0$ ($i \neq s$) em (2.12), obtém-se a envoltória CGI em pior caso como

$$r = \frac{r_s}{\sqrt{M}} = \frac{\hat{r}_s}{\sqrt{M}} \rho_s \quad (2.36)$$

A relação (2.36) constitui o limitante inferior do desempenho CGI. O combinador atua, então, como um atenuador de ganho $1/\sqrt{M}$ sobre o único ramo ativo. Numa interpretação alternativa, o ruído (soma incoerente dos ruídos dos ramos) se eleva, em potência, de um fator M . Sendo r_s do tipo Nakagami- m ou Rice com um dado grau de desvanecimento, a saída r CGI em pior caso também o é, embora com valor rms \sqrt{M} vezes menor. O limitante inferior do desempenho CGI sugere que este pode ser inferior ao do NUD e piorar com o aumento do número de ramos de diversidade.

2.3 Conclusão

Este capítulo generaliza a análise geométrica descrita em [9, 10]. O cenário adotado envolve ramos de diferentes potências médias e parâmetros de desvanecimento arbitrários, do tipo Nakagami- m ou Rice. Após a caracterização estatística dos modelos de desvanecimento e da derivada temporal da envoltória desvanecida, deduzem-se a PDF e a CDF da envoltória e da relação sinal-ruído na saída do combinador CGI. A partir disto, derivam-se confiabilidade, relação sinal-ruído média, probabilidade de erro, taxa de cruzamento de nível e duração média de desvanecimento. Todos estes critérios, com exceção da relação sinal-ruído média, expressam-se na forma de integrações multidimensionais do produto das densidades nos ramos, com multiplicidade da ordem do número de ramos. Por fim, considerando-se a existência de sinal em apenas um dos ramos de diversidade, obtém-se o limitante inferior do desempenho CGI. Este prevê um desempenho da CGI inferior ao do NUD e pior à medida que M aumenta. O capítulo 4 apresenta exemplos numéricos que se aproximam de tal limitante.

Capítulo 3

Análise Freqüencial da Combinação por Ganho Igual

O capítulo 2 evidencia a complexidade matemática da modelagem estatística da saída do combinador por ganho igual pela abordagem geométrica. O resultado se apresenta como uma integral de convolução M -dimensional envolvendo a densidade conjunta das envoltórias nos ramos. Imprecisão e má-convergência dificultam o uso do método à medida que a ordem de diversidade aumenta, tornando-o inviável já para baixos valores de M .

Neste capítulo, a análise CGI é estruturada no espaço de Fourier. Elimina-se a integração multidimensional da análise geométrica, substituindo-a por uma integração simples envolvendo o produto das transformadas de Fourier das densidades dos ramos.

3.1 Estatísticas da Envoltória e da Relação Sinal-Ruído

Conforme já dito, este trabalho — e não raro também a literatura — considera a envoltória r na saída do combinador CGI como uma soma de envoltórias independentes. Assim sendo, a transformada de Fourier ou função característica¹ (FC) de $p(r)$ corresponde ao produtório das transformadas das densidades de cada termo da soma.

Sejam $\phi_i(w)$ e $\phi(\omega)$ as FCs de $p(\rho_i)$ e $p(r)$, respectivamente. Com o uso de (2.12) e em vista da independência estatística entre os ramos de diversidade, escreve-se então que

$$\phi(\omega) = \prod_{i=1}^M \phi_i \left(\frac{\hat{r}_i \tilde{r}_i}{\sqrt{M}} \omega \right) \quad (3.1)$$

¹Neste trabalho, define-se a transformada de Fourier de uma função $f(t)$ como $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt$, a fim de se manter a definição usual de função característica.

A transformação inversa de Fourier, aplicada sobre (3.1), fornece $p(r)$:

$$p(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega r} \phi(\omega) d\omega \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega r} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(\frac{\hat{r}_b \tilde{r}_i}{\sqrt{M}} \omega \right) d\omega \quad (3.3)$$

Uma vez que $p(r)$ é real, podemos considerar apenas a parte real do integrando em (3.3). Além disso, tal integrando apresenta simetria do conjugado², visto que os termos $\phi_i(\omega)$ são TFs de funções reais (as densidades). Assim, sua parte real é uma função par de ω . Em conjunto, tais fatores permitem simplificar (3.3) para

$$p(r) = \frac{1}{\pi \hat{r}_b} \int_0^{\infty} \text{Re} \left[e^{-j\omega r} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(\frac{\tilde{r}_i}{\sqrt{M}} \omega \right) \right] d\omega \quad (3.4)$$

onde o operador $\text{Re}[\cdot]$ indica parte real. Integrando-se (3.2), tem-se que

$$\begin{aligned} P(r) &= \int_0^r p(r = \alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) \int_0^r e^{-j\omega \alpha} d\alpha d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\omega) \left(\frac{e^{-j\omega r} - 1}{-j\omega} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\omega)}{j\omega} d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\omega)}{j\omega} e^{-j\omega r} d\omega \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Note que a primeira integral em (3.5) pode ser simplificada através da Relação de Parseval $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt$, considerando-se que $p(r)$ e $\text{sign}(r)/2$ são as anti-transformadas de $\phi(\omega)$ e j/ω , respectivamente. Assim, e com uso de (3.1), (3.5) simplifica-se para

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{1}{2\pi} \left[2\pi \int_0^{\infty} \frac{p(r)}{2} dr - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\omega)}{j\omega} e^{-j\omega r} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} \left[\frac{\phi(\omega)}{j\omega} e^{-j\omega r} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} \left[\frac{e^{-j\omega r}}{j\omega} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(\frac{\tilde{r}_i}{\sqrt{M}} \omega \right) \right] d\omega \end{aligned} \quad (3.6)$$

²Uma função $F(\omega)$ apresenta simetria do conjugado se $F(-\omega) = F^*(\omega)$, onde $F^*(\omega)$ denota o complexo conjugado de $F(\omega)$.

Uma simples transformação de variável, dada por (2.14), conduz às estatísticas da relação sinal-ruído γ na saída do combinador

$$p(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma\tilde{\gamma}_b}} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[e^{-j\omega\sqrt{\delta}} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(\sqrt{\frac{\tilde{\gamma}_i}{M}} \omega \right) \right] d\omega \quad (3.7)$$

$$P(\gamma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-j\omega\sqrt{\delta}}}{j\omega} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(\sqrt{\frac{\tilde{\gamma}_i}{M}} \omega \right) \right] d\omega \quad (3.8)$$

O limite superior infinito que aparece nas integrais (3.4),(3.6),(3.7) e (3.8) não é conveniente para implementação numérica, uma vez que aumenta a suscetibilidade a problemas de convergência. Uma mudança de variável do tipo $y = \exp(-\omega)$ (renomeando-se, em seguida, y como ω) conduz a expressões numericamente mais estáveis

$$p(r) = \frac{1}{\pi\hat{r}_b} \int_0^1 \operatorname{Re} \left[\omega^{j\rho-1} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(-\frac{\tilde{r}_i}{\sqrt{M}} \ln \omega \right) \right] d\omega \quad (3.9)$$

$$P(r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \operatorname{Re} \left[\frac{j\omega^{j\rho-1}}{\ln \omega} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(-\frac{\tilde{r}_i}{\sqrt{M}} \ln \omega \right) \right] d\omega \quad (3.10)$$

$$p(\gamma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma\tilde{\gamma}_b}} \int_0^1 \operatorname{Re} \left[\omega^{j\sqrt{\delta}-1} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(-\sqrt{\frac{\tilde{\gamma}_i}{M}} \ln \omega \right) \right] d\omega \quad (3.11)$$

$$P(\gamma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \operatorname{Re} \left[\frac{j\omega^{j\sqrt{\delta}-1}}{\ln \omega} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(-\sqrt{\frac{\tilde{\gamma}_i}{M}} \ln \omega \right) \right] d\omega \quad (3.12)$$

É interessante reafirmar que a análise freqüencial elimina as integrações multidimensionais da análise geométrica, substituindo-a por integrais simples. Entretanto, a validade desta afirmação implica no conhecimento de expressões fechadas para as FCs das densidades das envoltórias desvanecidas que aparecem em (3.4)–(3.8), ou, equivalentemente, em (3.9)–(3.12). Tais expressões são conhecidas para os modelos de desvanecimento Nakagami- m , Rice e Hoyt [1, 12]; a seção 3.5 apresenta as FCs dos dois primeiros modelos, objetos deste trabalho.

3.2 Confiabilidade e Relação Sinal-Ruído Média

Segundo o capítulo 2, calcula-se a confiabilidade como $C(\gamma) = 1 - P(\gamma)$. Utilizando-se (3.12) para $P(\gamma)$, obtém-se a formulação da confiabilidade no espaço de Fourier. A formulação da RSR média, por sua vez, é indiferente ao espaço de análise (original ou transformado), visto que depende apenas das médias das envoltórias nos ramos de diversidade, como apresentado

em (2.20).

3.3 Probabilidade de Erro

Aplicando-se a Relação de Parseval sobre (2.26) e observando-se que a integral tem parte imaginária nula (P_b é real) e parte real par em relação a ω , obtém-se a seguinte expressão para a probabilidade de erro de bit [1]

$$\begin{aligned} P_b &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{P_b}(\omega) \phi^*(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} [\phi_{P_b}(\omega) \phi^*(\omega)] d\omega \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $\phi_{P_b}(\omega)$ é a transformada de Fourier da probabilidade de erro condicional $P_b(\gamma = r^2)$. Mais uma vez, mostra-se conveniente uma mudança de variável do tipo $y = \exp(-\omega)$ (renomeando-se, em seguida, y como ω), o que resulta em

$$P_b = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \omega^{-1} \text{Re} [\phi_{P_b}(-\ln \omega) \phi^*(-\ln \omega)] d\omega \quad (3.14)$$

Observe que $P_b(\gamma = r^2)$ é função de r , e não de γ . É sobre a variável r , portanto, que a transformação de Fourier $\phi_{P_b}(\omega)$ se aplica. A seção 3.5 trata da obtenção destas transformadas para alguns esquemas binários de modulação digital. Observe que, no menos favorável dos casos, quando não há expressão fechada para $\phi_{P_b}(\omega)$, (3.14) constitui uma integração dupla.

3.4 Estatísticas de Segunda Ordem

A equação (2.32) estabelece uma importante relação entre $p(r)$ e a taxa de cruzamento de nível. Substituindo-se (3.9) em (2.32), obtém-se a TCN

$$N(r) = f_m \left(\frac{1}{2\pi M} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i^2 \zeta_i^2 \right)^{1/2} \int_0^1 \text{Re} \left[\omega^{j\rho-1} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(-\frac{\tilde{r}_i}{\sqrt{M}} \ln \omega \right) \right] d\omega \quad (3.15)$$

Substituindo-se (3.10) e (3.15) em (2.34), formula-se a DMD como

$$T(r) = \frac{1}{f_m} \left(\frac{1}{2\pi M} \sum_{i=1}^M \tilde{r}_i^2 \zeta_i^2 \right)^{-1/2} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \text{Re} \left[\frac{j\omega^{j\rho-1}}{\ln \omega} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(-\frac{\tilde{r}_i}{\sqrt{M}} \ln \omega \right) \right] d\omega}{\int_0^1 \text{Re} \left[\omega^{j\rho-1} \prod_{i=1}^M \phi_i \left(-\frac{\tilde{r}_i}{\sqrt{M}} \ln \omega \right) \right] d\omega} \quad (3.16)$$

3.5 Transformações de Fourier

Esta seção apresenta as transformadas de Fourier da PDF de envoltórias Nakagami- m e Rice, bem como da probabilidade de erro condicional de modulações binárias convencionais.

As PDFs das envoltórias normalizadas de Nakagami- m e Rice são apresentadas em (2.1) e (2.4), respectivamente. Suas transformadas de Fourier são conhecidas [1]. Para desvanecimento Nakagami- m , mostra-se que

$$\phi_i(\omega) = {}_1F_1\left(m_i; \frac{1}{2}; -\frac{\omega^2}{4m_i}\right) + j\omega \frac{\Gamma(m_i + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_i)\sqrt{m_i}} {}_1F_1\left(m_i + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{\omega^2}{4m_i}\right) \quad (3.17)$$

Para desvanecimento Rice, mostra-se que

$$\begin{aligned} \phi_i(\omega) = e^{-k_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_i^n}{n!} {}_1F_1\left(n + 1; \frac{1}{2}; -\frac{\omega^2}{4(1 + k_i)}\right) \\ + j\omega(1 + k_i)^{-1/2} e^{-k_i} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \frac{k_i^n}{(n!)^2} {}_1F_1\left(n + \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{\omega^2}{4(1 + k_i)}\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Quanto à probabilidade de erro condicional $P_b(\gamma = r^2)$, a depender da modulação considerada, nem sempre é possível obter uma expressão fechada para sua transformada de Fourier. Neste trabalho, apresentam-se fórmulas fechadas para as TFs das técnicas de modulação binária em freqüência (FSK - *frequency shift keying*) e em fase (PSK - *phase shift keying*), com detecção coerente e não-coerente. Como o sinal rádio-móvel sofre severos desvanecimentos em sua envoltória, a modulação em amplitude (ASK - *amplitude shift keying*) não é apropriada, sendo, portanto, omitida aqui. É importante ressaltar que, mesmo na ausência de uma solução fechada para $\phi_{P_b}(\omega)$ (o que pode ocorrer para técnicas mais complexas de modulação), (3.13) continua aplicável, na forma de uma integral dupla.

Os esquemas de modulação binária mais comuns associam-se às seguintes expressões de probabilidade de erro condicional [1]:

$$P_b(\gamma = r^2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{erfc}(r) & , \text{ PSK coerente} \\ \frac{1}{2}\text{erfc}(\sqrt{\frac{1}{2}}r) & , \text{ FSK coerente} \\ \text{erfc}(r) - \frac{1}{2}\text{erfc}^2(r) & , \text{ DPSK coerente} \\ \frac{1}{2}\exp(-r^2) & , \text{ DPSK não-coerente} \\ \frac{1}{2}\exp(-\frac{1}{2}r^2) & , \text{ FSK não-coerente} \end{cases} \quad (3.19)$$

sendo $\text{erfc}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$ a função erro complementar. Para efeito de cálculo da TF, classificam-se os cinco esquemas em três grupos:

1. $P_b(\gamma = r^2) = \text{aerfc}(\sqrt{br})$. Reúne as versões coerentes das técnicas FSK ($a = 1/2$; $b = 1/2$) e PSK ($a = 1/2$; $b = 1$). Mostra-se que a TF de $P_b(\gamma = r^2)$ é dada por

$$\phi_{P_b}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{\pi b}} H\left(\frac{w}{2\sqrt{b}}\right) + j \frac{a}{\omega} \left(1 - \exp\left(-\frac{w^2}{4b}\right)\right) \quad (3.20)$$

onde $H(x) \triangleq {}_1F_1(1; 3/2; -x^2)$.

2. $P_b(\gamma = r^2) = a \exp(-br^2)$. Engloba FSK ($a = 1/2$; $b = 1/2$) e DPSK ($a = 1/2$; $b = 1$) não-coerentes. Neste caso, a TF vale

$$\phi_{P_b}(\omega) = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(-\frac{w^2}{4b}\right) + j \frac{a}{2b} \omega H\left(\frac{w}{2\sqrt{b}}\right) \quad (3.21)$$

3. $P_b(\gamma = r^2) = \text{aerfc}(\sqrt{br}) - \text{cerfc}^2(\sqrt{br})$. Aplica-se à modulação DPSK com detecção coerente ($a = 1$; $b = 1$; $c = 1/2$). Utilizando-se integração por partes para calcular a transformada de $\text{erfc}^2(\sqrt{br})$, chega-se ao seguinte resultado [1]

$$\begin{aligned} \phi_{P_b}(\omega) = & \frac{a - 2c}{\sqrt{\pi b}} H\left(\frac{w}{2\sqrt{b}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi b}} c \exp\left(-\frac{w^2}{8b}\right) H\left(\frac{w}{2\sqrt{2b}}\right) \\ & + j \left\{ \frac{a - c}{\omega} \left[1 - \exp\left(-\frac{w^2}{4b}\right)\right] + \frac{c}{2\pi b} \omega H^2\left(\frac{w}{2\sqrt{2b}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

De posse das transformadas apresentadas nesta seção e das expressões gerais da análise freqüencial apresentadas anteriormente, é possível quantificar todos os critérios de performance abordados para a técnica CGI em ambientes Nakagami- m , Rice ou misto (com ambos os tipos de desvanecimento), abrangendo o cálculo de probabilidade de erro para esquemas binários de modulação PSK e FSK com detecção coerente ou não.

3.6 Conclusão

Uma abordagem alternativa no espaço de Fourier evita as onerosas integrações multidimensionais da análise geométrica da combinação por ganho igual. Em havendo independência estatística entre os sinais de diversidade, a PDF da envoltória na saída do combinador CGI resulta da convolução das PDFs das envoltórias dos ramos. No espaço de Fourier, alternativamente, tal densidade aparece como a antitransformada do produto das transformadas das PDFs dos ramos. Estas últimas são conhecidas em forma fechada para os modelos Nakagami- m , Rice e Hoyt de desvanecimento. Assim, formulam-se a densidade e a distribuição CGI como integrais simples. Tais integrais fornecem diretamente a confiabilidade e as estatísticas

de segunda ordem. A RSR média é indiferente ao espaço de análise. Quanto à probabilidade de erro de bit, desde que se conheça uma expressão fechada para a TF da taxa de erro condicional do esquema de modulação investigado, também resulta numa integração simples.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

Este capítulo apresenta curvas dos vários critérios de desempenho da CGI para desvanecimento Nakagami- m e modulação BPSK, utilizando-se das expressões desenvolvidas nos capítulos 2 e 3. As curvas para desvanecimento Rice seguem a mesma tendência daquelas apresentadas para Nakagami- m , e não serão tratadas aqui. Discutem-se as circunstâncias que recomendam o uso da abordagem geométrica ou da freqüencial. A análise das curvas enfoca os efeitos do desbalanceamento de potência entre os ramos, das condições de desvanecimento arbitrárias e do número de sinais de diversidade sobre o desempenho da técnica de combinação por ganho igual. A fim de se estabelecer como referência o uso isolado do canal de maior potência média (NUD mais otimista), adota-se $\bar{\gamma}_b = \bar{\gamma}_{max}$ e $\hat{r}_b = \hat{r}_{max}$, com o sub-índice *max* identificando tal canal.

4.1 Confiabilidade

A figura 4.1 apresenta a confiabilidade CGI para envoltórias iid, com $m_i \in \{0.5, 2\}$ e $M \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. As curvas evidenciam aspectos gerais do desempenho CGI:

- Melhora com o aumento do número de ramos;
- Melhora com a redução da severidade do canal (aumento de m_i);
- O ganho de diversidade decresce com o aumento do número de ramos e com a redução da severidade do canal.

Na construção da figura 4.1, as abordagens geométrica e freqüencial foram utilizadas para $M \in \{2, 3, 4\}$ e $M = 5$, respectivamente. A superioridade desta ou daquela depende da circunstância em que são aplicadas. Para poucos ramos de diversidade, o método geométrico é bastante eficiente e veloz. Mostra-se lento, entretanto, à medida que M cresce, a ponto

de tornar-se impreciso ou mesmo incapaz de efetuar os cálculos. Tal comportamento é esperado, visto que a abordagem geométrica formula a confiabilidade como uma integração M -dimensional.

Em se tratando da análise freqüencial, é a complexidade do integrando que acompanha o crescimento de M . Paradoxalmente, constata-se que tal crescimento melhora a convergência numérica das formulações em freqüência. A estrutura de (3.12) fornece uma possível explicação para tanto. Observe que seu integrando contém o termo $1/\omega$, o qual diverge na origem. Em contrapartida, as FCs que multiplicam este termo se anulam na origem. Assim, quanto maior o M , maior a quantidade de FCs e, portanto, também maior o potencial das mesmas em compensar a divergência de $1/\omega$, garantindo estabilidade numérica nos cálculos. Por outro lado, há um contra-efeito: para M excessivamente elevado, o peso acrescido pela complexidade dos cálculos excede o referido ganho de compensação. Além disso, o aumento de M acentua a oscilação do integrando no outro extremo da região de integração, próximo à unidade, podendo causar instabilidade numérica.

As demais curvas de confiabilidade correspondem ao uso de (2.18) com $M = 3$.

O efeito isolado de condições de desvanecimento distintas entre os ramos é ilustrado na figura 4.2. Observa-se que cada ramo “atrai” a curva de confiabilidade rumo à curva iid correspondente ao seu parâmetro de desvanecimento. Quanto maior o número de “atratores” (ramos com mesma condição de desvanecimento), maior o efeito da “atração”.

A figura 4.3 contempla o desbalanceamento de potência entre os ramos. Adota-se um perfil de decaimento exponencial de potência, com $\bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}_1 \exp(-\lambda(i - 1))$. Sem perda de generalidade, o ramo 1 é o de maior potência média, ou seja, $\bar{\gamma}_{max} = \bar{\gamma}_1$. Os cenários $\lambda = 0$ e $\lambda \rightarrow \infty$ correspondem à condição iid e ao limitante inferior de desempenho (apenas um ramo com sinal), respectivamente. Observe que quanto maior o fator de decaimento λ , maior o desbalanceamento de potência, e também maior a degradação de desempenho, a ponto de torná-lo inferior ao do NUD¹. O limitante inferior de desempenho representa uma perda de $10 \log M$ dB (≈ 4.77 dB para $M = 3$) em relação ao NUD. Verifica-se isto no gráfico.

No mais arbitrário dos cenários, desvanecimentos e potências são vários. Essa ocorrência é objeto da figura 4.4. Sabemos que quanto maior o desbalanceamento de potência e a severidade de desvanecimento dos diversos ramos, pior o desempenho da CGI. Assim, o aumento das severidades dos desvanecimentos dos ramos de potência média não máxima ($i \in \{2, 3, \dots, M\}$, na convenção adotada) acentua a degradação imposta pelo desbalanceamento de potência sozinho. Contrariamente, a redução de tais severidades atenua tal degradação. Se suficiente, a ação positiva desta redução pode mesmo exceder o efeito deletério

¹Subentende-se, aqui e nos demais parágrafos, o NUD mais otimista, definido pelo uso do canal de maior potência média.

do desbalanceamento de potência, acima de certos níveis de confiabilidade, como demonstra a curva (a) da figura 4.4.

Para os demais critérios de desempenho, os efeitos dos parâmetros investigados são análogos àqueles referentes à confiabilidade. Todavia, há particularidades de cada critério. As seções seguintes enfocam apenas tais particularidades, poupando discussões repetitivas.

4.2 Relação Sinal-Ruído Média

A figura 4.5 apresenta o ganho $\bar{\gamma}/\bar{\gamma}_{\max}$ de RSR média em cenário iid. Observe que a melhora na condição de desvanecimento eleva o ganho de RSR média, característica dos métodos de adição de sinais de diversidade (CGI e CRM). No limite, para $m_i \rightarrow \infty$, a CGI atinge o desempenho da CRM (combinação ótima), ou seja, $\bar{\gamma}/\bar{\gamma}_{\max} = M$.

A condição de desvanecimentos diversos é ilustrada na figura 4.6. Aqui também ocorre o fenômeno dos “atratores” identificado para a confiabilidade. Note que qualquer configuração arbitrária de desvanecimento mapeia-se numa curva de desempenho entre as curvas extremas da figura 4.5, para $m_i = 0.5$ e $m_i \rightarrow \infty$. O efeito deletério do desbalanceamento de potência, por sua vez, é muito mais contundente, como mostra a figura 4.7. A degradação evolui a ponto de tornar a CGI inferior, em desempenho, ao não-uso de diversidade, e pior à medida que M cresce. Na figura, por exemplo, isto ocorre para $\lambda = 1$ e $M > 4$.

A maior significância das potências médias (comparadas aos parâmetros de desvanecimento dos ramos) na determinação da RSR média pode ser abstraída de (2.20). Os $\bar{\gamma}_i$ aparecem em ambos os somatórios e variam de zero à unidade. Os m_i ou k_i , por sua vez, determinam as médias $E(\rho_i)$ que ponderam apenas um dos somatórios. Além disso, a faixa de variação destas médias é mais estreita: $\sqrt{2/\pi} \leq E(\rho_i) \leq 1$ para Nakagami- m e $\sqrt{\pi}/2 \leq E(\rho_i) \leq 1$ para Rice.

O efeito conjunto de potências e desvanecimentos diversos é contemplado na figura 4.8. Veja que, partindo-se de um cenário apenas desbalanceado ($m_i = 1$ e $\lambda = 1/2$), a melhora ou piora resultante de alterações nos m_i não é muito significativa diante da degradação preponderante imposta pelo desbalanceamento de potência.

4.2.1 Uma Proposta de Combinação Dinâmica

Como observado, a performance CGI nem sempre melhora com o aumento do número de sinais de diversidade. Isto fica claro na figura 4.7. Em havendo estimadores adequados para os momentos de primeira e segunda ordens dos ramos de diversidade, (2.20) constitui a base para um método dinâmico de combinação por ganho igual que considere tais estimativas.

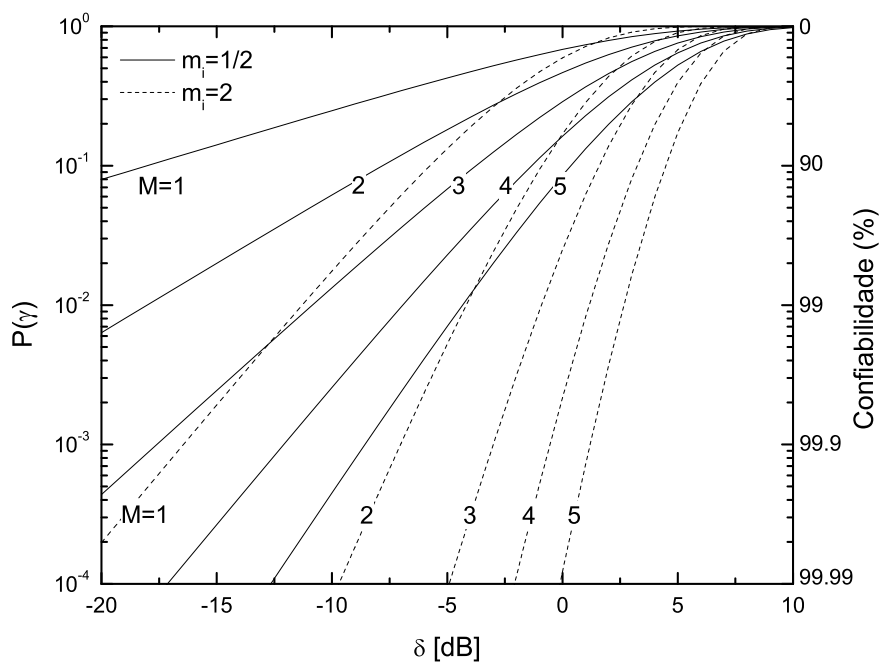


Figura 4.1: Confiabilidade; cenário iid.

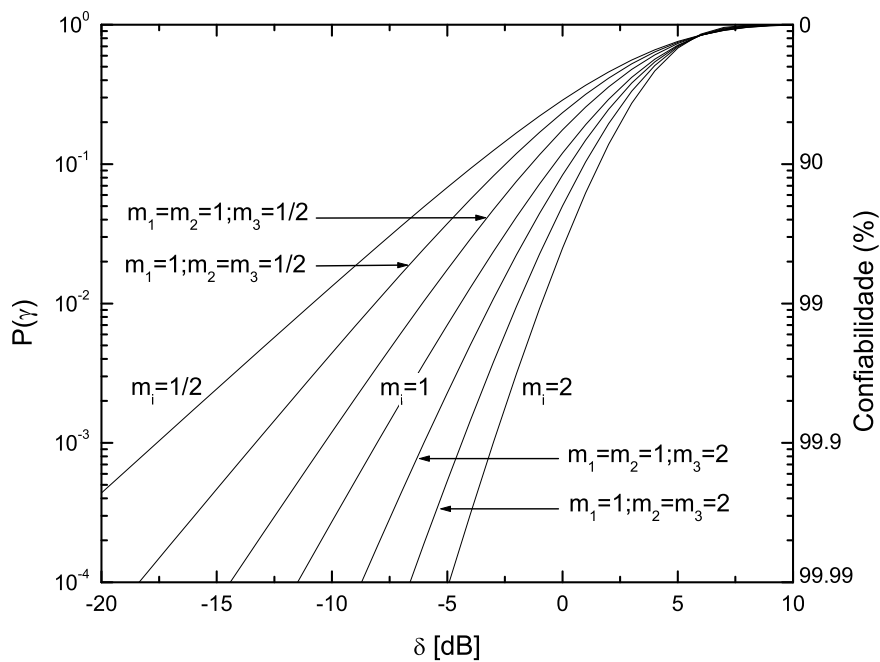


Figura 4.2: Confiabilidade; desvanecimentos arbitrários ($M = 3$).

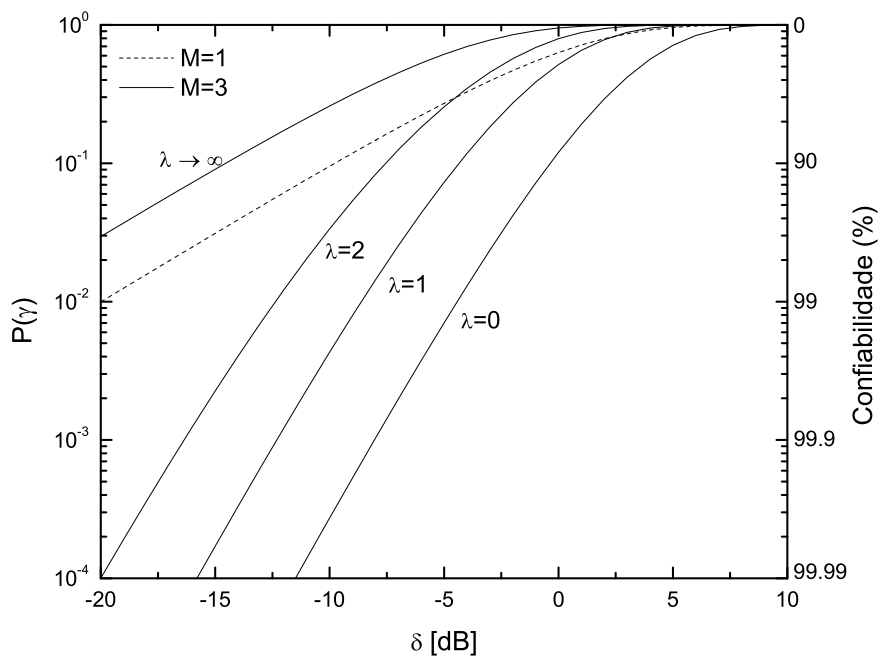


Figura 4.3: Confiabilidade; potências médias arbitrárias ($m_i = 1$).

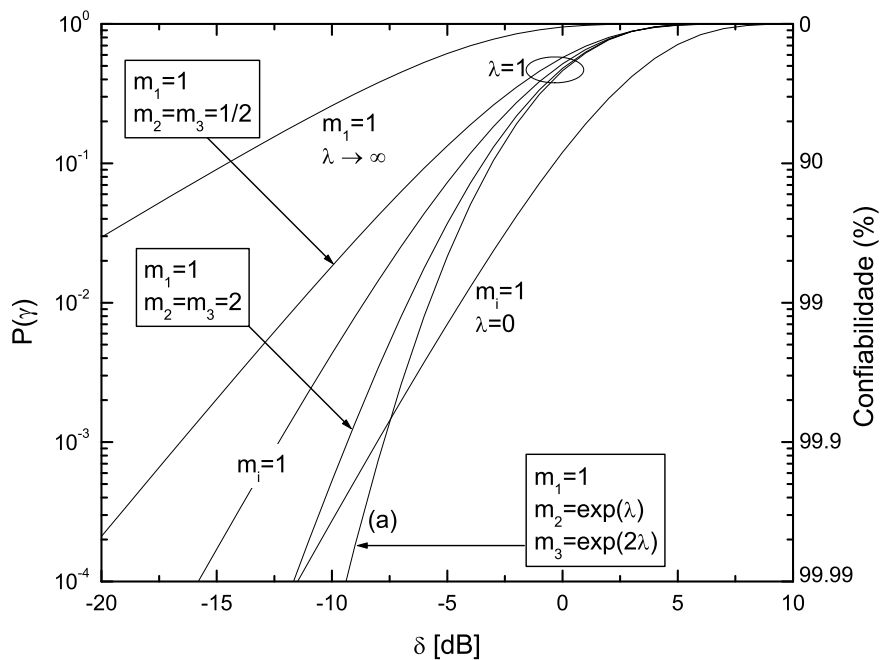


Figura 4.4: Confiabilidade; desvanecimentos e potências médias arbitrários ($M = 3$).

Dispondo de M canais de diversidade, tal método decide, adaptativamente, pela adição de um subconjunto deles, a fim de maximizar a RSR média. Uma primeira proposta para a regra de decisão seria combinar os L ramos de maior potência média, tal que

$$L = \arg \left\{ \max_{1 \leq l \leq M} \left[\frac{1}{l} \left(\sum_{i=1}^l \tilde{\gamma}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \sqrt{\tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j} E(\rho_i) E(\rho_j) \right) \right] \right\} \quad (4.1)$$

considerando-se $\tilde{\gamma}_1 = 1 \geq \tilde{\gamma}_2 \geq \tilde{\gamma}_3 \geq \dots \geq \tilde{\gamma}_M$. De fato, a maximização deveria varrer todas as $2^M - 1$ possíveis combinações dos ramos de diversidade em busca do máximo global, e não apenas as M combinações envolvendo os l ramos de maior potência média. Entretanto, em vista da constatada preponderância das potências médias dos ramos na determinação do desempenho final da CGI, muito provavelmente este acréscimo de possibilidades não altera a solução (4.1). Tais observações, é claro, permanecem aqui como hipótese, a ser investigada com rigor em trabalhos futuros.

4.3 Probabilidade de Erro

Esta seção apresenta curvas de probabilidade de erro de bit CGI para modulação BPSK. Para outras técnicas de modulação, o efeito dos diversos parâmetros estudados sobre as curvas de P_b são qualitativamente similares ao observado para modulação BPSK.

As figuras 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12 abordam os diversos cenários. Por ser uma integração da PDF ponderada pela taxa de erro condicional, a probabilidade de erro de bit reflete o comportamento das curvas de confiabilidade. As discussões feitas para este critério estendem-se, pois, àquele.

A abordagem freqüencial sobressai à geométrica no cálculo da probabilidade de erro de bit como em nenhum outro critério de desempenho. A precisão, a convergência e a velocidade de processamento da abordagem freqüencial são consideravelmente superiores no cálculo de P_b . Para desvanecimento Rayleigh e $M = 20$, por exemplo, o método geométrico fracassa em efetuar quaisquer cálculos de probabilidade de erro². O método freqüencial, por sua vez, fornece o valor correto de P_b para $\bar{\gamma}_{max} = 10\text{dB}$ em menos de 2.4s. Há uma provável razão para a evidente superioridade da análise freqüencial de P_b . Observe que o integrando de (3.14) inclui o termo $\phi_{P_b}(-\ln(\omega))$, que tende a zero rumo à origem para modulação BPSK. Isto reforça o potencial de compensação da divergência $1/\omega$, descrito na seção 4.1. A formulação freqüencial alternativa apresentada no apêndice A é ainda mais rápida, gastando apenas 0.08s

²Os cálculos foram efetuados com a função `NIntegrate` do software `Mathematica` num Pentium 4 de 1.8GHz com sistema operacional Windows.

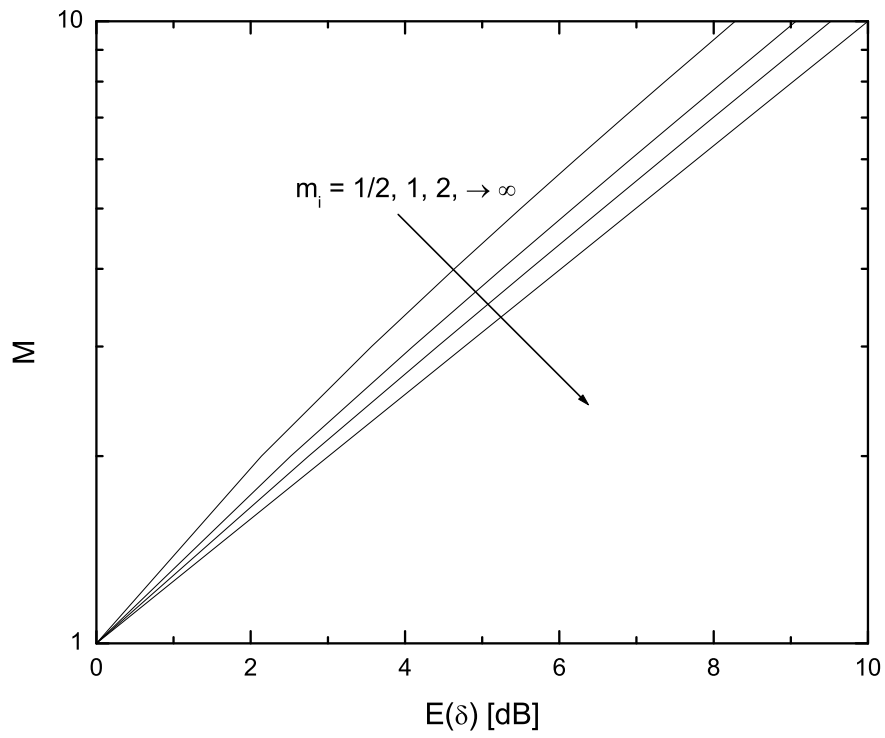


Figura 4.5: M versus RSR média; cenário iid.

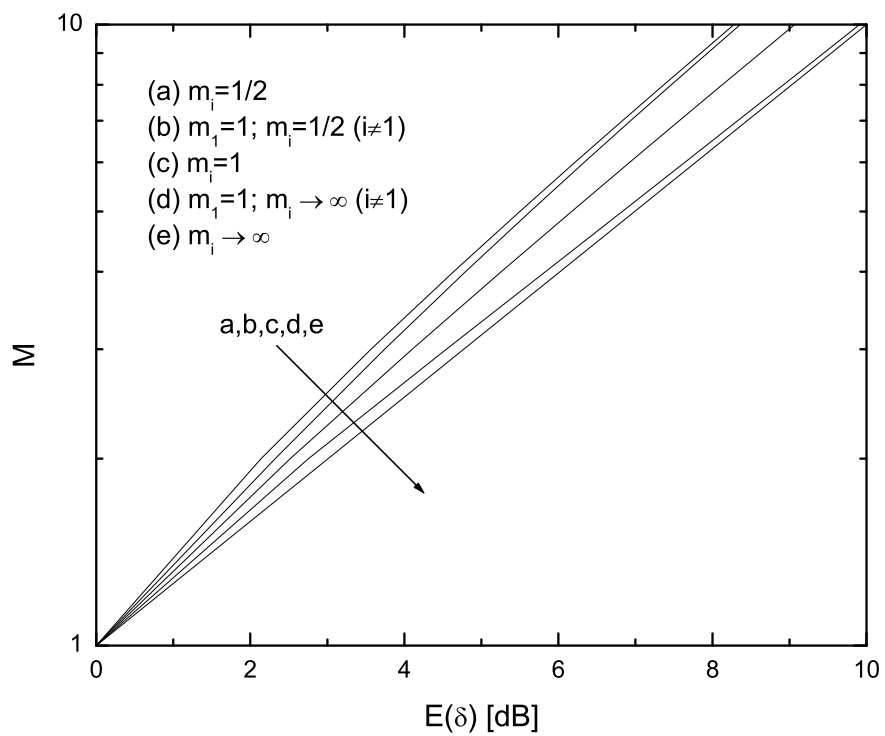


Figura 4.6: M versus RSR média; desvanecimentos arbitrários.

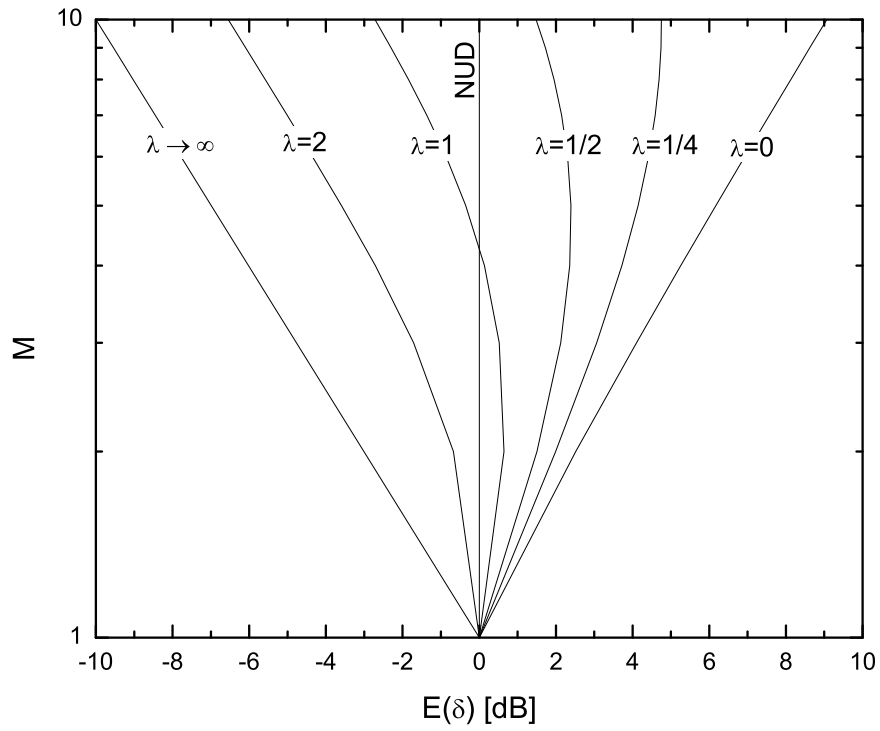


Figura 4.7: M versus RSR média; potências médias arbitrárias ($m_i = 1$).

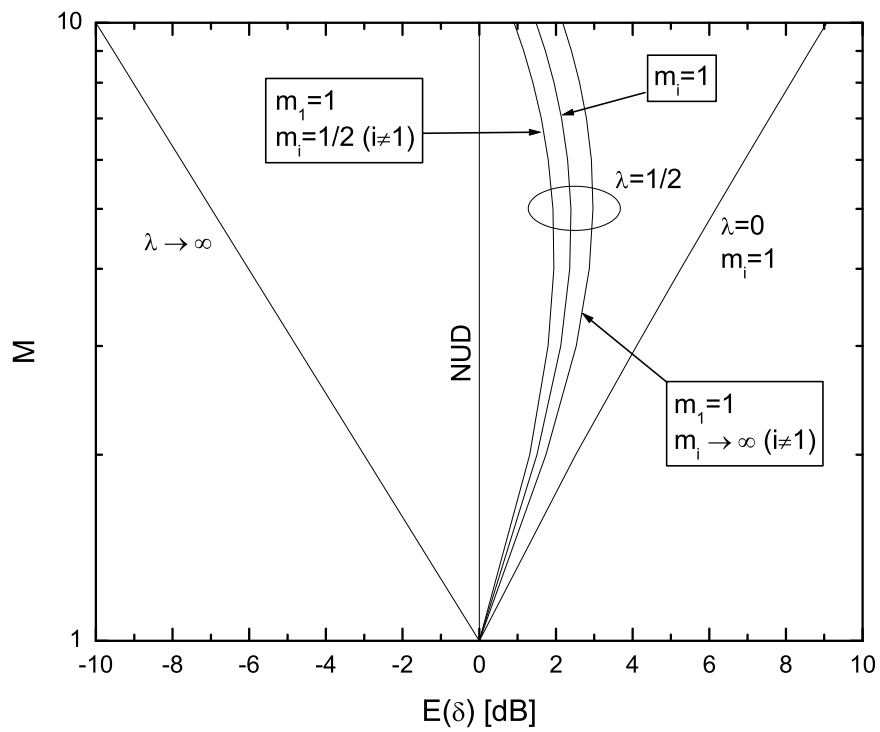


Figura 4.8: M versus RSR média; desvanecimentos e potências médias arbitrários.

para efetuar o cálculo em questão.

4.4 Estatísticas de Segunda Ordem

Como esperado pelo uso de técnicas de combinação de diversidade, a figura 4.13, para cenário iid, mostra que o aumento da ordem de diversidade faz o sinal cruzar baixos e altos níveis com menor e maior frequência, respectivamente. Não tão óbvio (e despercebido em vários trabalhos) é o fato de que a severidade do desvanecimento nos ramos tem efeito dual: sua redução diminui a TCN tanto para baixos quanto para altos níveis de sinal. O primeiro efeito é positivo; o segundo, prejudicial. Como motivo de tal comportamento está o fato de que um sinal mais severamente desvanecido é mais espalhado em torno de seu valor rms e, portanto, têm maior probabilidade de atingir valores acima de certo patamar.

Os cenários não-iid estão contemplados nas figuras 4.14, 4.15 e 4.16. Aqui também se aplicam as observações gerais feitas para a confiabilidade. Destacam-se, nas figuras, a ação deletéria preponderante do desbalanceamento de potências entre os ramos e o parco efeito das condições arbitrárias de desvanecimento para altos níveis de sinal.

Espera-se, com o uso de diversidade, reduzir o tempo médio que o sinal radio-móvel permanece abaixo de um dado nível. A figura 4.17 revela, para o caso iid, que tal redução se intensifica com o aumento do número de ramos. Verifica-se, assim como ocorre para a taxa de cruzamento de nível, a ação dual da severidade do desvanecimento: reduzi-la melhora o desempenho para baixos níveis de sinal, mas o degrada para níveis elevados. As demais figuras, 4.18, 4.19 e 4.20, ilustrando os casos não-iid, também revelam comportamentos análogos aos obtidos para a taxa de cruzamento de nível.

4.5 Conclusão

Os exemplos investigados ilustram de forma representativa o desempenho CGI e sua dependência em relação às potências médias dos ramos, às condições de desvanecimento e ao número de sinais de diversidade.

Na literatura, é comum a afirmação de que o desempenho CGI melhora com o aumento do número de ramos e com a redução da severidade dos canais. Em termos absolutos, isto só é verdade para a RSR média com ramos iid. Para os demais critérios e circunstâncias, a análise não é tão simples. Uma observação atenta das figuras apresentadas revela que a confiabilidade pode piorar com a redução da severidade de desvanecimento, se considerarmos um nível de sinal acima de certo limiar. Isto porque sinais mais desvanecidos assumem valores suficientemente elevados com maior probabilidade. Este mesmo fenômeno provoca

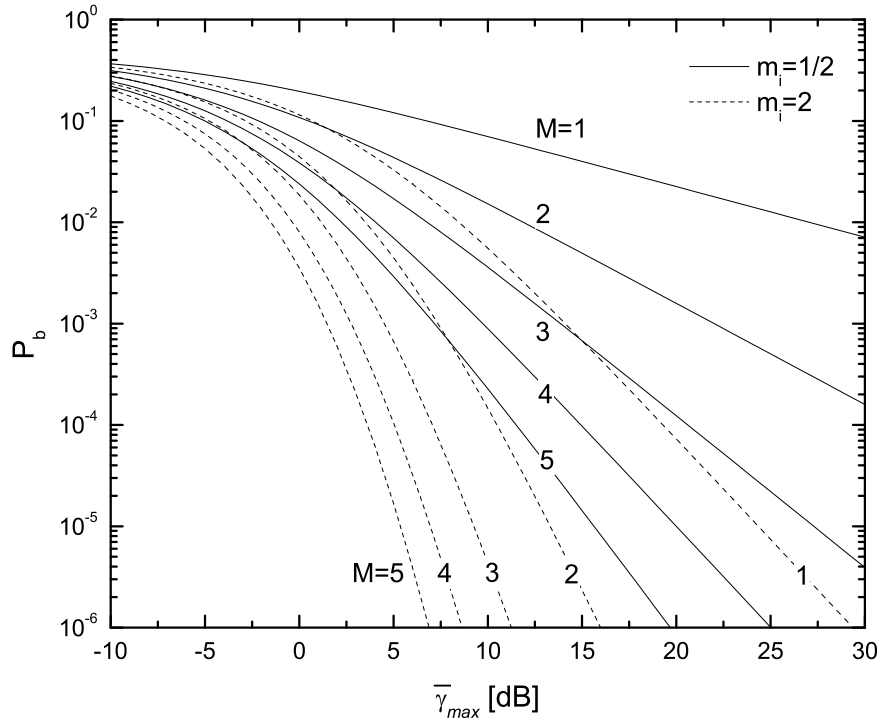


Figura 4.9: Probabilidade de erro; cenário iid.

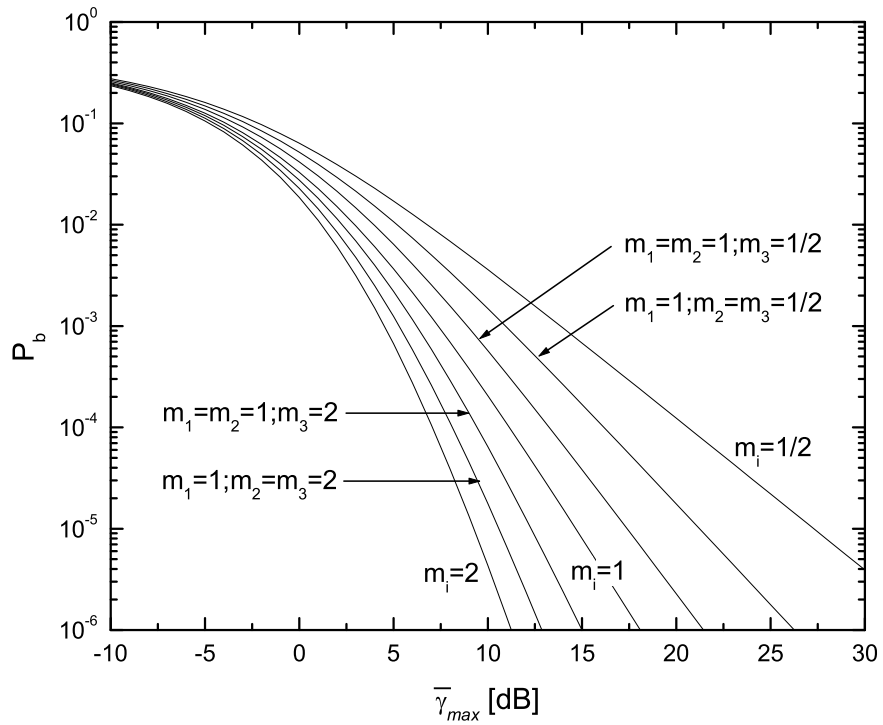


Figura 4.10: Probabilidade de erro; desvanecimentos arbitrários ($M = 3$).

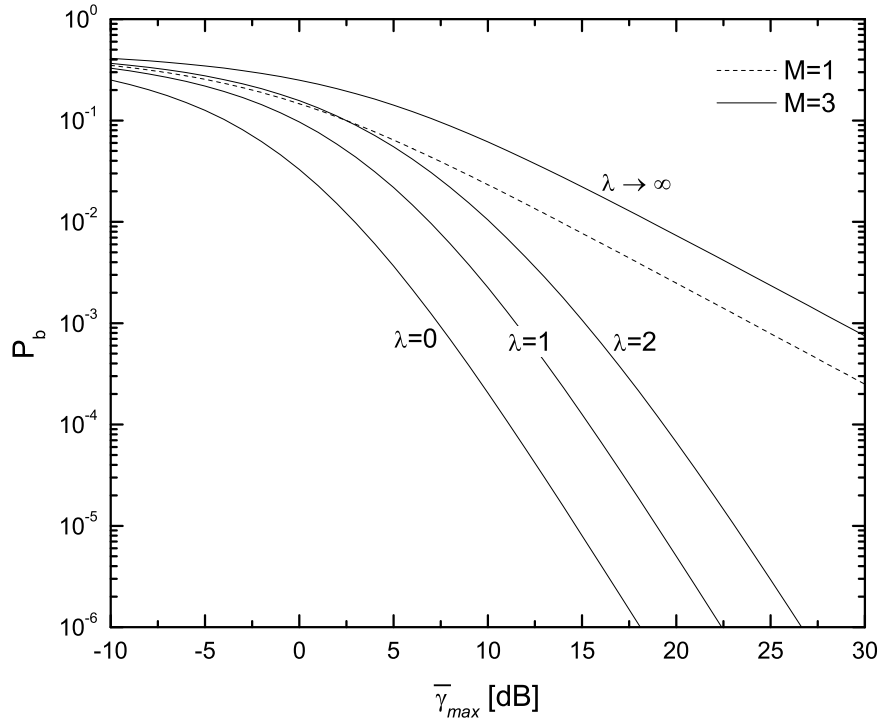


Figura 4.11: Probabilidade de erro; potências médias arbitrárias ($m_i = 1$).

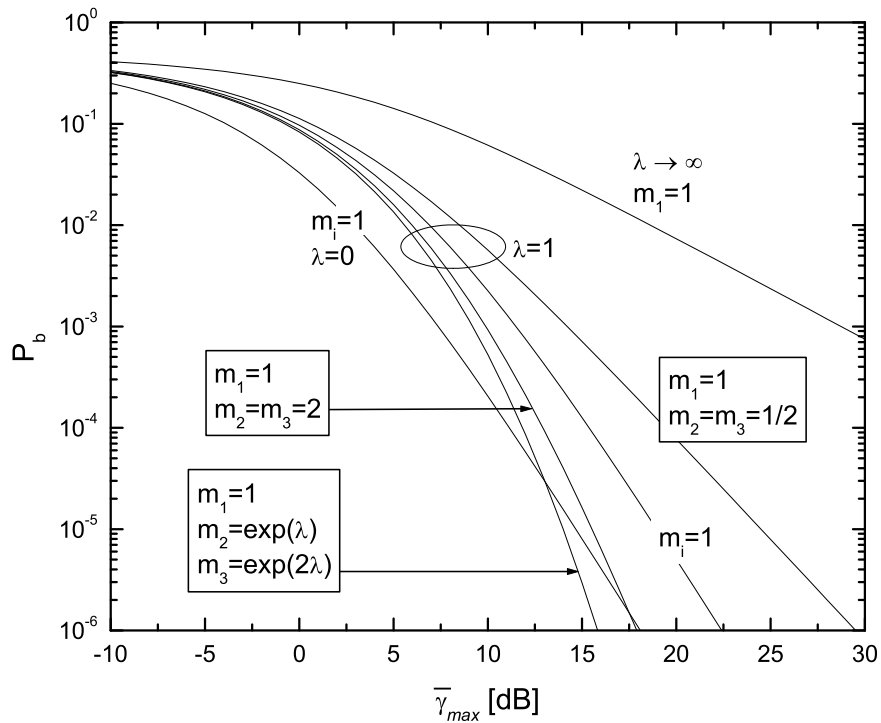


Figura 4.12: Probabilidade de erro; desvanecimentos e potências médias arbitrários ($M = 3$).

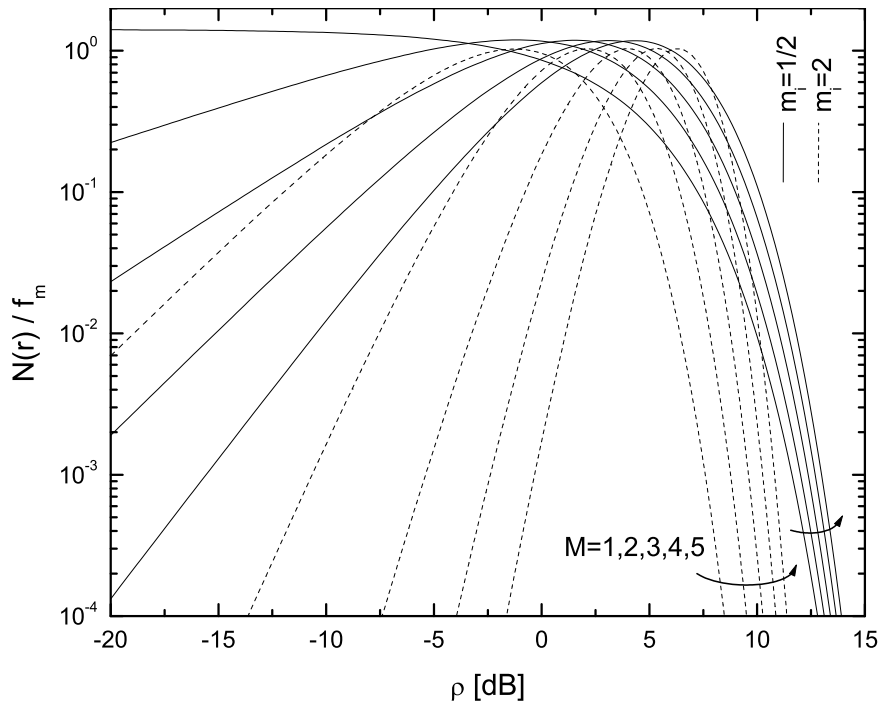


Figura 4.13: Taxa de cruzamento de nível; cenário iid.

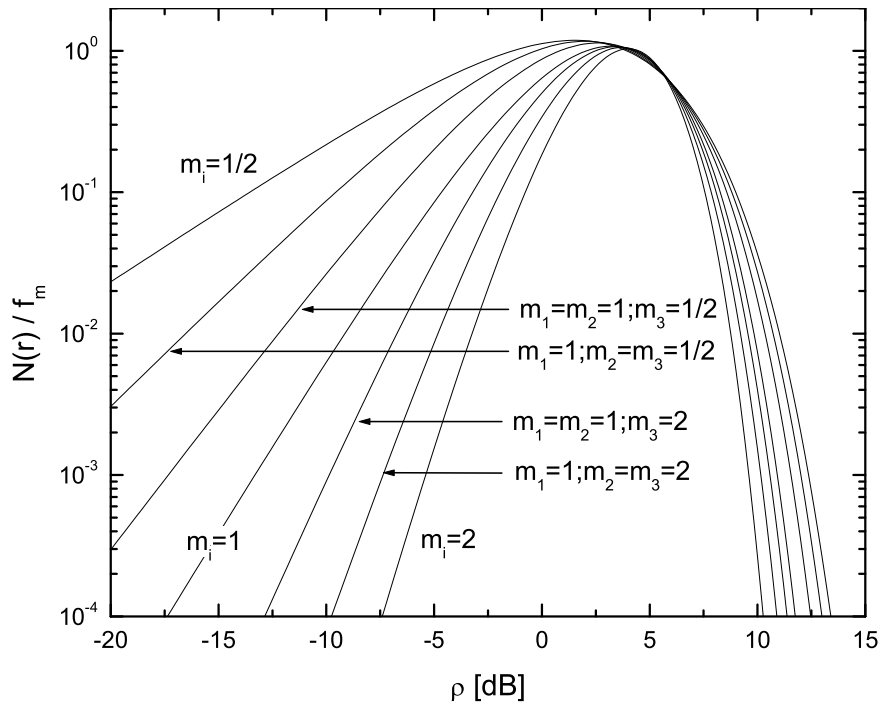


Figura 4.14: Taxa de cruzamento de nível; desvanecimentos arbitrários ($M = 3$).

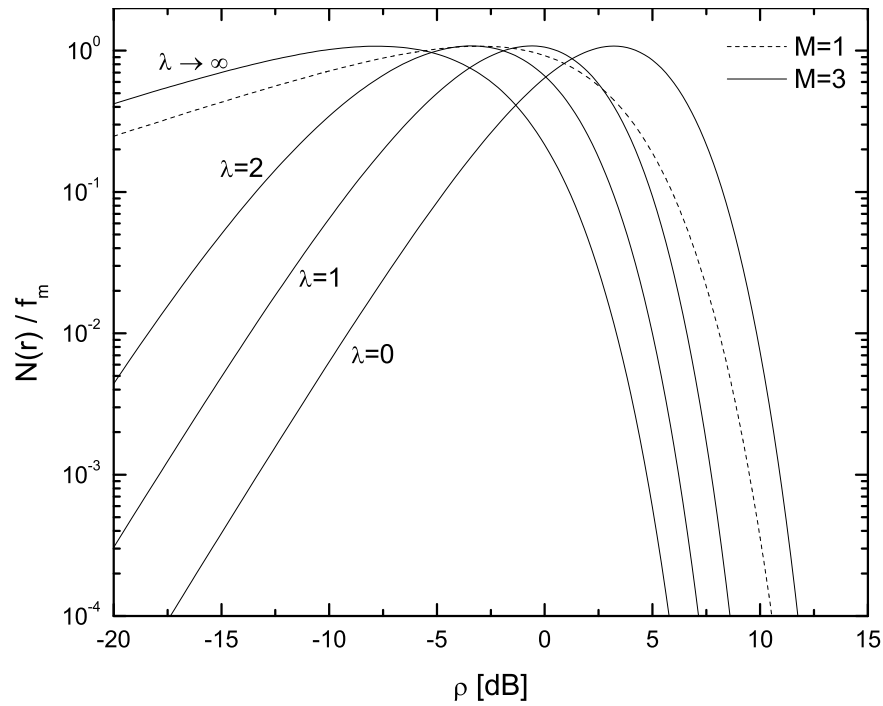


Figura 4.15: Taxa de cruzamento de nível; potências médias arbitrárias ($m_i = 1$).

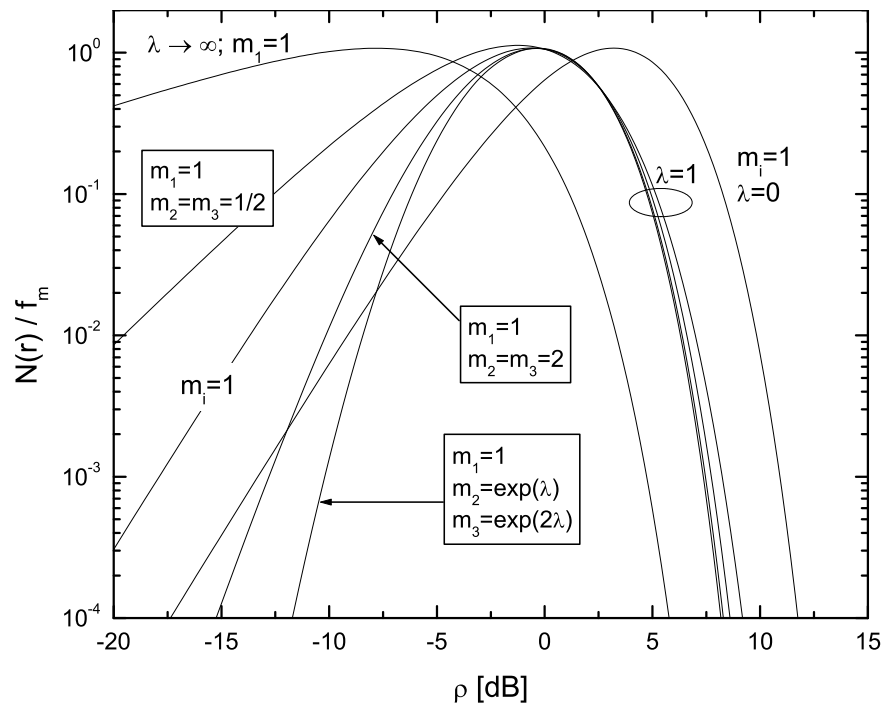


Figura 4.16: Taxa de cruzamento de nível; desvanecimentos e potências médias arbitrários ($M = 3$).

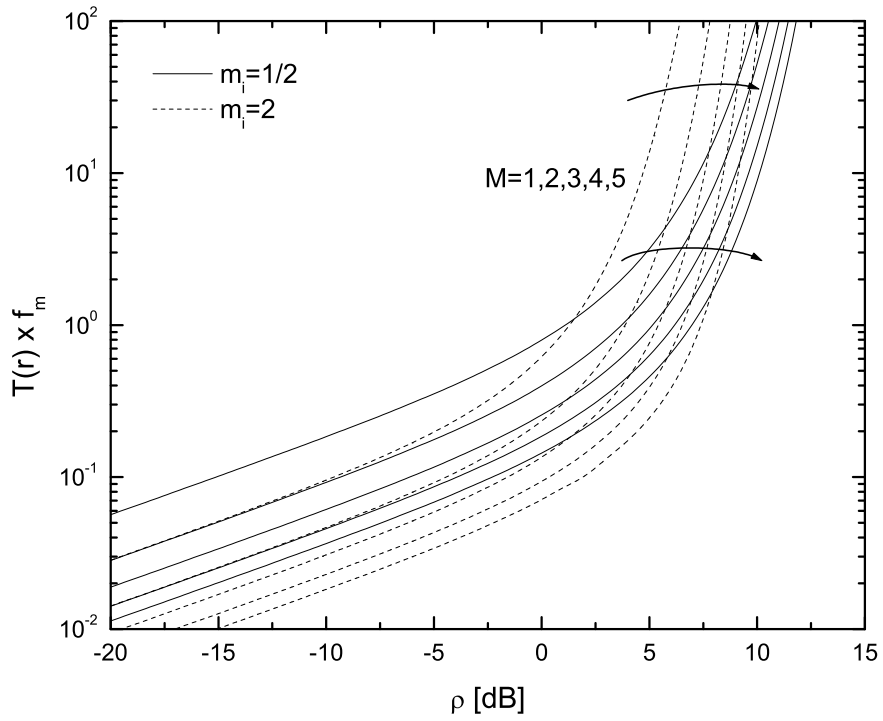


Figura 4.17: Duração média de desvanecimento; cenário iid.

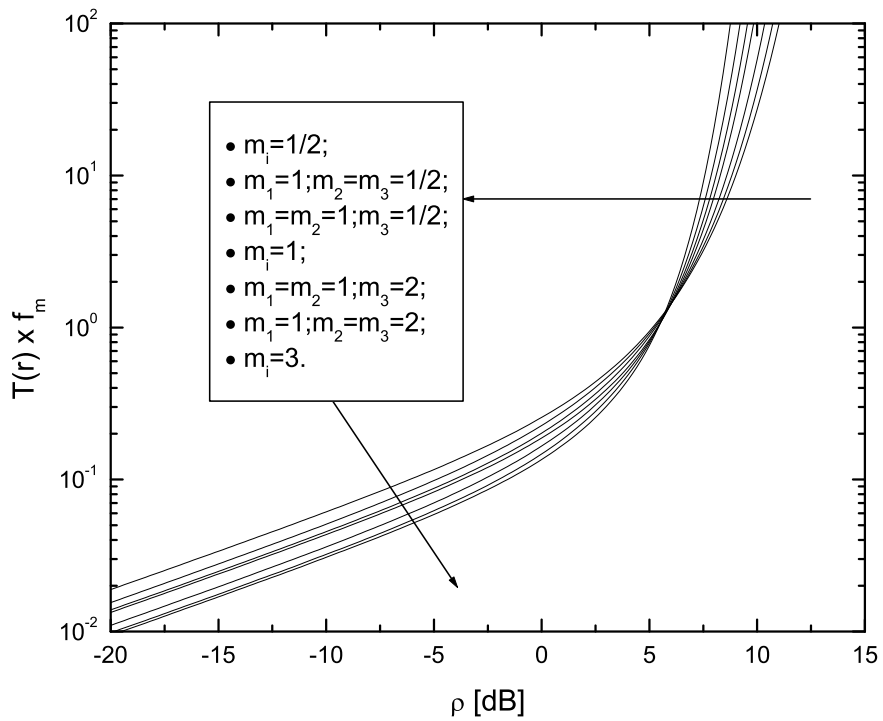


Figura 4.18: Duração média de desvanecimento; desvanecimentos arbitrários ($M = 3$).

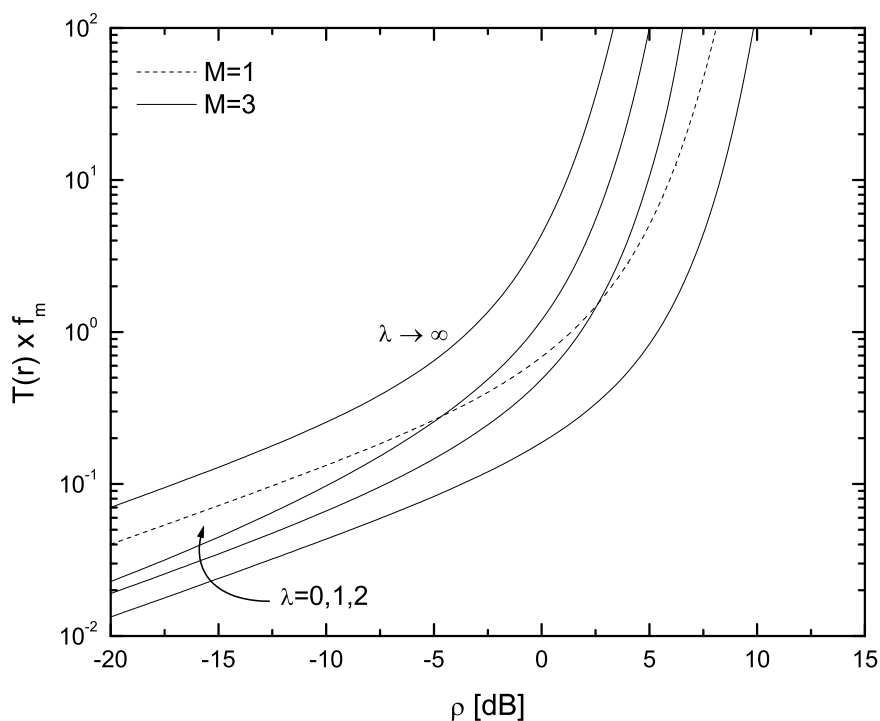


Figura 4.19: Duração média de desvanecimento; potências médias arbitrárias ($m_i = 1$).

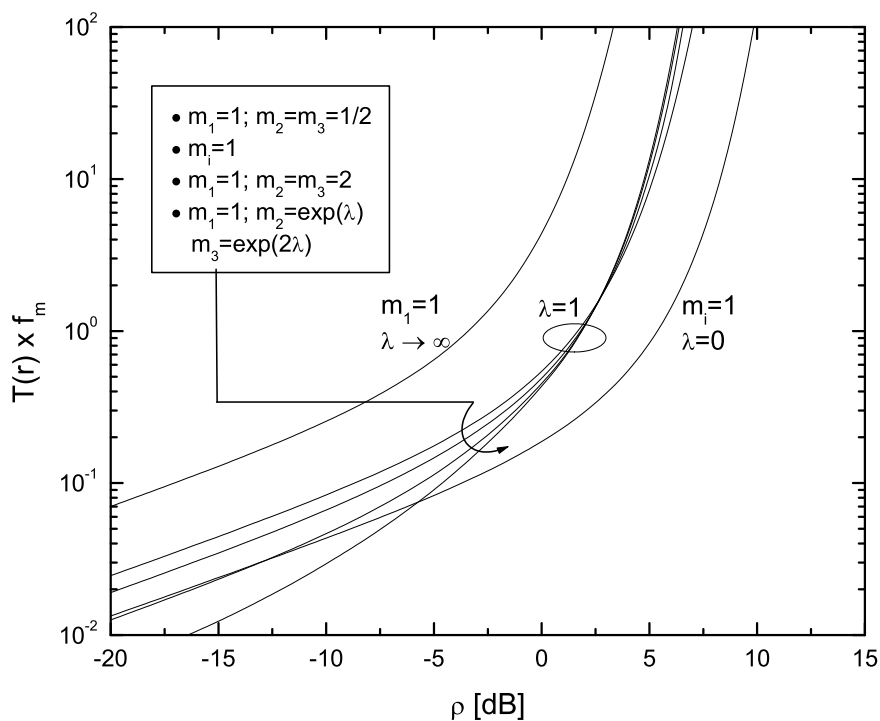


Figura 4.20: Duração média de desvanecimento; desvanecimentos e potências médias arbitrários ($M = 3$).

um efeito dual do aumento da severidade de desvanecimento sobre a TCN e a DMD: melhora o desempenho para baixos níveis de sinal e o deteriora para altos níveis. A ação deletéria preponderante provém do desbalanceamento de potência. Sendo este grande o bastante, o desempenho CGI pode se tornar inferior ao do não-uso de diversidade ou mesmo decair com o aumento do número de ramos.

Capítulo 5

Considerações Finais

A técnica de combinação de diversidade por ganho igual constitui um atrativo instrumento de combate ao desvanecimento rápido da envoltória rádio-móvel em sistemas de comunicação sem fio, por sua eficiência e relativa simplicidade de implementação, quando comparada às demais técnicas. No entanto, a formulação estatística da envoltória CGI é uma tarefa bastante complicada. A solução aparece na forma de uma integral de convolução M -dimensional. Não se conhecem soluções fechadas para $M > 2$.

Na literatura, inexistente uma formulação geral e unificada dos vários critérios de desempenho da CGI para ramos de diversidade com potências médias quaisquer e condições de desvanecimento arbitrárias. Eis o primeiro objetivo desta dissertação. O segundo, mais inovador, consistiu em reformular a análise CGI — mantida a arbitrariedade dos canais de diversidade — no domínio de Fourier. Esta reformulação evita a integral de convolução M -dimensional que tradicionalmente descreve a PDF da envoltória CGI, substituindo-a por uma integral simples envolvendo o produto das TFs das PDFs das envoltórias dos ramos. A alternativa freqüencial mostra-se superior — em precisão, convergência e velocidade de processamento — à medida que o número de ramos aumenta.

A dissertação analisa as expressões obtidas para os diversos critérios de desempenho, a partir de exemplos numéricos representativos em ambiente Nakagami- m . Isto possibilitou avaliar os efeitos do desbalanceamento de potência e da arbitrariedade dos desvanecimentos nos ramos sobre o desempenho da CGI. Novos aspectos de comportamento da técnica foram revelados, com verificação de que, sob certas condições, ela pode destoar de seu comportamento padrão comumente apontado. Para desbalanceamento de potência suficientemente grande, por exemplo, o desempenho CGI pode ficar aquém daquele referente ao não-uso de diversidade e até decair com o aumento do número de ramos.

5.1 Investigações Futuras

Toda pesquisa é parte de um processo inacabado. Em se tratando da técnica de combinação por ganho igual, vislumbram-se os tópicos seguintes como objetos potenciais de futuros trabalhos:

Combinador Dinâmico O eventual efeito deletério do aumento do número de ramos conduziu à proposta de um combinador por ganho igual dinâmico, que adicione um subconjunto dos sinais de diversidade a fim de maximizar a RSR média do sinal resultante. Propôs-se, neste trabalho, um possível critério de decisão para o novo combinador, cuja eficiência, entretanto, deve ser objeto de novas investigações.

Análise Aproximada em Forma Fechada A aproximação da soma de VAs desvanecidas por um modelo de desvanecimento conhecido (em forma fechada) constitui uma interessante abordagem no estudo da combinação por ganho igual. Em seu clássico artigo [13], Nakagami afirma que a soma de VAs Nakagami- m iid é aproximadamente uma VA Nakagami- m . Em [17], usa-se tal idéia na obtenção de expressões fechadas para as estatísticas de segunda ordem da combinação por ganho igual em ambiente Nakagami- m iid. Publicações recentes [18, 19, 20] apresentam modelos gerais de desvanecimento (distribuições $\eta - \mu$ e $\kappa - \mu$) com maior riqueza de parâmetros, que motivam a extensão da idéia de Nakagami para a soma de sinais com tipos de desvanecimento vários (Nakagami- m , Rice e Hoyt, por exemplo) e potências médias distintas. O autor desta dissertação constatou, em investigações preliminares, um grande potencial para tal extensão.

Ruídos Desbalanceados e Correlacionados A consideração de ruídos correlacionados entre si e com potências médias distintas não representa grande salto de complexidade na formulação analítica da técnica de combinação por ganho igual. Para ruídos independentes e de mesma potência média \mathcal{N} — hipótese feita neste trabalho —, a soma não-coerente dos ruídos conduz a uma potência média de $M\mathcal{N}$. Por outro lado, não é difícil deduzir que, em havendo correlação e desbalanceamento entre os ruídos nos ramos, a potência média da soma dos ruídos é dada por

$$\sum_{i=1}^M \mathcal{N}_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^M \nu_{ij} \sqrt{\mathcal{N}_i \mathcal{N}_j}$$

onde \mathcal{N}_i é a potência média do ruído no i -ésimo ramo e ν_{ij} é o coeficiente de correlação entre os ruídos nos i - e j -ésimo ramos. Vale ressaltar que o ruído não insere nenhum

conteúdo estocástico nas formulações da combinação por ganho igual; a sua influência aparece na forma de constantes — potência média e coeficiente de correlação — que descrevem o comportamento médio dos ruídos dos ramos.

Sinais Correlacionados O maior dos desafios pendentes, sem dúvida, reside no estudo da combinação por ganho igual para sinais de diversidade correlacionados. Bem pouco tem sido feito nesta área e sobram razões para tal escassez. As formulações da confiabilidade e da probabilidade de erro dependem da PDF conjunta dos M sinais de diversidade. Infelizmente, inexistem propostas de tal densidade para envoltórias desvanecidas correlacionadas com $M > 2$. A RSR média CGI, entretanto, é formulável em ambiente com correlação, uma vez que não depende diretamente da expressão da densidade conjunta dos ramos, mas dos momentos conjuntos. A novidade seria substituir o produto de primeiros momentos $E(\rho_i)E(\rho_j)$ em (2.20) por $E(\rho_i\rho_j)$, uma vez que ρ_i e ρ_j não mais são independentes. A esperança cruzada $E(\rho_i\rho_j)$ é conhecida para envoltórias Nakagami- m correlacionadas [13, 21]. De fato, uma formulação ainda mais geral da RSR média CGI englobando ruídos correlacionados entre si é também viável. Maior complexidade recai sobre a taxa de cruzamento de nível e a duração média de desvanecimento. A dificuldade advém do fato de que, em havendo correlação entre os ramos, a envoltória CGI e sua derivada temporal não mais apresentam independência estatística. Na verdade, apenas um trabalho [22] formula as estatísticas de segunda ordem da CGI para ramos correlacionados; limita-se, entretanto, ao caso Rayleigh iid e $M = 2$. Contudo, é possível generalizar os resultados em [22] para 2 ramos Rayleigh correlacionados, desbalanceados em potência e com ruídos correlacionados.

Simulação Por fim, vale lembrar que a complexidade analítica serve de estímulo ao uso e ao aprimoramento de técnicas de simulação como alternativa no estudo da combinação por ganho igual. Em certos casos, talvez seja mesmo este o caminho mais prático, senão o único realizável.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Annamalai, C. Tellambura, and V. K. Bhargava. Equal-Gain Diversity Receiver Performance in Wireless Channels. *IEEE Trans. on Commun.*, 48(10):1732–1745, October 2000.
- [2] Cyril-Daniel Iskander and P. Takis Mathiopoulos. Analytical Level Crossing Rates and Average Fade Durations for Diversity Techniques in Nakagami Fading Channels. *IEEE Trans. Commun.*, 50(8):1301–1309, August 2002.
- [3] N. C. Beaulieu. An Infinite Series for the Computation of the Complementary Probability Distribution Function of a Sum of Independent Random Variables and Its Application to the Sum of Rayleigh Random Variables. *IEEE Trans. on Commun.*, 38:1463–1474, Sept. 1990.
- [4] N. C. Beaulieu and A. Abu-Dayya. Analysis of Equal Gain Diversity on Nakagami Fading Channels. *IEEE Trans. on Commun.*, 39:225–234, Feb. 1991.
- [5] A. Abu-Dayya and N. C. Beaulieu. Microdiversity on Rician Fading Channels. *IEEE Trans. on Commun.*, 42:225–234, June 1994.
- [6] C. Tellambura and A. Annamalai. Further Results on the Beaulieu Series. *IEEE Trans. on Commun.*, 48:1774–1777, Nov. 2000.
- [7] George K. Karagiannidis and Stavros A. Kotsopoulos. On the Distribution of the Weighted Sum of L Independent Rician and Nakagami Envelopes in the Presence of AWGN. *KICS Journal of Communications and Networks*, 3(2):26–30, June 2001.
- [8] D. G. Brennan. Linear Diversity Combining Techniques. *Proceedings of the IRE*, 47:1075–1102, June 1959.
- [9] Cláudio Rafael Cunha Monteiro da Silva. Solução Generalizada para Técnicas de Diversidade-Combinação. Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas (FEEC/UNICAMP), 2001.

-
- [10] M. D. Yacoub, C. R. C. M. da Silva, and J. E. Vargas B. Second-Order Statistics for Diversity-Combining Techniques in Nakagami-Fading Channels. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 50(6):1464–1470, November 2001.
- [11] A. Annamalai, C. Tellambura, and V. K. Bhargava. Unified Analysis of Equal-Gain Diversity on Rician and Nakagami Fading Channels. In *Proc. 1999 IEEE WCNC*, pages 10–14, 1999.
- [12] A. Annamalai, Jing Su, and C. Tellambura. Exact Analysis of Equal-Gain Diversity Systems over Fading Channels. In *Proc. IEEE VTC (Spring)*, pages 1031–1034, May 2000.
- [13] M. Nakagami. “The m -distribution - A general formula of intensity distribution of rapid fading”. In W. C. Hoffman, editor, *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*. Pergamon, New York, 1960.
- [14] S. O. Rice. Statistical Properties of a Sine Wave Plus Random Noise. *Bell Syst. Tech. J.*, 27:109–157, 1948.
- [15] M. D. Yacoub, J. E. Vargas B., and L. G. de R. Guedes. On Higher Order Statistics of the Nakagami- m Distribution. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 48(3):790–794, May 1999.
- [16] M. D. Yacoub. *Foundations of Mobile Radio Engineering*. CRC Press, FL:Boca Raton, first edition, 1993.
- [17] M. D. Yacoub, J. C. S. Santos Filho, and C. R. C. M. da Silva. Simple Closed-Form Solutions for Level Crossing Rate and Average Fade Duration in Nakagami- m Equal Gain Combining. *Electronics Letters*, 38(25):1734–1735, December 2002.
- [18] M. D. Yacoub. General Fading Distributions. *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, 17(1):1–13, Junho 2002.
- [19] M. D. Yacoub. The $\eta - \mu$ Distribution: A General Fading Distribution. In *IEEE Boston Fall Vehicular Technology Conference 2000*, Boston, USA, September 2000.
- [20] M. D. Yacoub. The $\kappa - \mu$ Distribution: A General Fading Distribution. In *IEEE Atlantic City Fall Vehicular Technology Conference 2001*, Atlantic City, USA, October 2001.
- [21] J. Reig, L. Rubio, and N. Cardona. Bivariate Nakagami- m Distribution with Arbitrary Fading Parameters. *Electronics Letters*, 38(25):1715–1717, December 2002.

- [22] F. Adachi, M. T. Feeney, and J. D. Parsons. “Effects of Correlated Fading on Level Crossing Rates and Average Fade Durations with Predetection Diversity Reception”. *IEE Proc. Pt. F*, 135(1):11–17, February 1988.
- [23] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, New York, 5th edition, 1995.
- [24] Q. T. Zhang. Probability of Error for Equal-Gain Combiners: Some Closed-Form Solutions. *IEEE Trans. Commun.*, 45:270–273, March 1997.
- [25] X. Qi, M.-S. Alouini, and Y.-C. Ko. Closed-form Analysis of Dual-Diversity Equal-Gain Combiners over Rayleigh Channels. In *Proc. IEEE VTC (Spring)*, pages 1559–1563, May 2002.

Apêndice A

Formulação Freqüencial Alternativa da Probabilidade de Erro para Modulações Binárias Coerentes

O cálculo da probabilidade de erro de bit apresentado na seção 3.3 envolve o conhecimento das FCs das envoltórias dos ramos e da transformada de Fourier da probabilidade de erro condicional. Todavia, esta última não é necessária para modulações binárias coerentes (CPSK e CFSK), visto que a função erro complementar possui uma representação integral exponencial satisfatória, como segue.

Após algumas manipulações algébricas, não é difícil verificar que a probabilidade de erro condicional das modulações binárias CPSK ($a = 1/2; b = 1$) e CFSK ($a = 1/2; b = 1/2$) pode ser reformulada como [1]

$$a\text{erfc}(\sqrt{br}) = a - \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-t^2/2} \sin(\sqrt{2br}t) dt \quad (\text{A.1})$$

Esta representação é apropriada para o descondicionamento de $P_b(\gamma = r^2)$ sobre $p(r)$. Substituindo-se (A.1) em (2.26), obtém-se uma nova expressão para a probabilidade de erro

de bit das modulações binárias coerentes:

$$\begin{aligned}
 P_b &= \int_0^\infty \left[a - \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty t^{-1} e^{-t^2/2} \sin(\sqrt{2b}rt) dt \right] p(r) dr \\
 &= a - \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty t^{-1} e^{-t^2/2} \int_0^\infty \text{Im} \left[e^{j\sqrt{2b}rt} \right] p(r) dr dt \\
 &= a - \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty t^{-1} e^{-t^2/2} \text{Im} \left[\int_0^\infty e^{j\sqrt{2b}rt} p(r) dr \right] dt \\
 &= a - \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty t^{-1} e^{-t^2/2} \text{Im} \left[\phi(\sqrt{2b}t) \right] dt
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

O operador $\text{Im}[\cdot]$ indica parte imaginária. Observe que

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} \text{Im} \left[\phi(\sqrt{2b}t) \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{2b}tr)}{t} p(r) dr \\
 &= \int_0^\infty \sqrt{2b}r p(r) dr = \sqrt{2b}E(r)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Isso sugere que a integral (A.2) é bem comportada, mesmo com $t \rightarrow 0$, e, portanto, adequada para integração numérica. Com a mudança de variável $y = \exp(-t)$ (renomeando-se, em seguida, y como t), obtém-se, alternativamente,

$$P_b = a + \frac{2a}{\pi} \int_0^1 \frac{t^{-\left(\frac{\ln t}{2}+1\right)}}{\ln t} \text{Im} \left[\phi\left(-\sqrt{2b} \ln t\right) \right] dt \tag{A.4}$$

Uma vez que (A.4) é consideravelmente mais simples que (3.14), recomenda-se o uso daquela no cálculo da probabilidade de erro para modulações binárias coerentes.

Apêndice B

Soluções Fechadas para Canais Nakagami- m

Este apêndice reúne fórmulas fechadas para a probabilidade de erro de bit e para as estatísticas de segunda ordem da combinação por ganho igual em ambiente Nakagami- m . Os resultados são conhecidos da literatura e abrangem diversidade de ordens dois e três.

B.1 Probabilidade de Erro de Modulações Binárias

Em artigo recente [1], obtêm-se expressões fechadas para a probabilidade de erro de bit de modulações binárias com receptor CGI em ambiente Nakagami- m . Esta seção sintetiza os principais resultados.

Utilizando a identidade

$$\int_0^\infty x^{v-1} e^{-bx} \prod_{i=1}^M {}_1F_1(a_i; b_i; c_i x) dx = b^{-v} \Gamma(v) F_A\left(v; a_1, \dots, a_M; b_1, \dots, b_M; \frac{c_1}{b}, \dots, \frac{c_M}{b}\right) \\ [b_i > 0, v > 0, \sum c_i < b] \quad (\text{B.1})$$

em conjunto com (3.13) ou (A.2), é possível encontrar soluções fechadas de P_b para modulações binárias com qualquer ordem de diversidade, em termos da função hipergeométrica Appell $F_A(\dots)$ definida como [1]

$$F_A(\alpha; \beta_1, \dots, \beta_M; \gamma_1, \dots, \gamma_M; z_1, \dots, z_M) \\ = \sum_{i_1=0}^\infty \sum_{i_2=0}^\infty \dots \sum_{i_M=0}^\infty \frac{(\alpha)_{i_1+\dots+i_M} (\beta_1)_{i_1} \dots (\beta_M)_{i_M}}{(\gamma_1)_{i_1} \dots (\gamma_M)_{i_M} i_1! \dots i_M!} z_1^{i_1} \dots z_M^{i_M} \quad (\text{B.2})$$

A seguir, ilustra-se este processo para casos de interesse prático, com $M \in \{2, 3\}$ para detecção coerente e $M = 2$ para detecção não-coerente. Em certos cenários, se os parâmetros de desvanecimento m_i são todos inteiros positivos ou todos $1/2$ de inteiros positivos ímpares, a função hipergeométrica Appell pode ser simplificada numa soma finita de hipergeométricas Gaussianas ${}_2F_1(a, b; c; z)$, dadas por

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i}{(c)_i} \frac{z^i}{i!}, \quad |z| < 1 \quad (\text{B.3})$$

ou num polinômio finito. Note que, para a ou b (ou ambos) igual a zero ou a um inteiro negativo, a série (B.3) torna-se também finita, uma vez que $(x)_i = 0$ para $i > -x$ se x é um inteiro não-positivo, ou seja,

$${}_2F_1(x, b; c; z) = \sum_{i=0}^{-x} \frac{(x)_i (b)_i}{(c)_i} \frac{z^i}{i!}, \quad x = 0, -1, -2, \dots \quad (\text{B.4})$$

B.1.1 Detecção Coerente

O cálculo de P_b para modulações binárias coerentes (A.2) pode ser reformulado (por meio de uma simples substituição de variável) como

$$P_b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-t} \text{Im} \left[\phi \left(2\sqrt{bt} \right) \right] dt \quad (\text{B.5})$$

Observe que (B.5) não contém o parâmetro a presente em (A.2). Na verdade, substituiu-se $a = 1/2$, uma vez que isto é válido para ambas as modulações (BPSK e BFSK coerentes). Em se tratando de CGI com desvanecimento Nakagami- m , a parte imaginária de $\phi(\cdot)$ é uma soma de 2^{M-1} termos, cada um dos quais é um produto de M hipergeométricas confluentes de primeiro tipo (vide (3.17)). Assim, (B.5) requer a solução de integrais da forma

$$I = \int_0^{\infty} x^{v-1} e^{-bx} \prod_{i=1}^M {}_1F_1(a_i; b_i; c_i x) dx \quad (\text{B.6})$$

Tal solução corresponde à identidade (B.1).

Caso $M=1$

Na ausência de diversidade, substituindo-se (3.1) — com uso de (3.17) — para $M = 1$ em (B.5), obtém-se uma solução para a probabilidade de erro da CPSK e CFSK binárias em

ambiente Nakagami- m :

$$P_b = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{b\bar{\gamma}}{(m+b\bar{\gamma})\pi}} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(m)} {}_2F_1\left(1-m, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{b\bar{\gamma}}{m+b\bar{\gamma}}\right) \quad (\text{B.7})$$

Usando-se (B.4), (B.7) reduz-se a um polinômio finito para m inteiro. Em particular, se $m = 1$ (Rayleigh), tem-se

$$P_b = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+1/(b\bar{\gamma})}}\right) \quad (\text{B.8})$$

Para a condição mais severa de desvanecimento ($m = 1/2$), tem-se

$$P_b = \frac{1}{2} - \frac{\arctan(\sqrt{2b\bar{\gamma}})}{\pi} \quad (\text{B.9})$$

Caso $M=2$

Para dois ramos de diversidade, (B.5) fornece

$$P_b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty t^{-1} e^{-t} \left[R_1(\sqrt{2\bar{\gamma}_1 bt}) I_2(\sqrt{2\bar{\gamma}_2 bt}) + I_1(\sqrt{2\bar{\gamma}_1 bt}) R_2(\sqrt{2\bar{\gamma}_2 bt}) \right] dt \quad (\text{B.10})$$

onde

$$R_i(\omega) = \text{Re}[\phi_i(\omega)] = {}_1F_1\left(m_i; \frac{1}{2}; -\frac{\omega^2}{4m_i}\right)$$

e

$$R_i(\omega) = \text{Im}[\phi_i(\omega)] = \omega \frac{\Gamma(m_i + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_i)\sqrt{m_i}} {}_1F_1\left(m_i + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{\omega^2}{4m_i}\right)$$

Aplicando-se a relação funcional [23, eq. (9.212.1)] ${}_1F_1(\alpha, \gamma; z) = e^z {}_1F_1(\gamma - \alpha, \gamma; -z)$ sobre $R_i(\omega)$ e $I_i(\omega)$ em (B.10) e com uso de (B.1), mostra-se que

$$P_b = \frac{1}{2} - \sum_{i=1, l \neq i}^2 \frac{\Gamma(m_l + \frac{1}{2})}{\pi \Gamma(m_l)} \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_l b}{2m_l}} I\left(m_i, \frac{\bar{\gamma}_i b}{2m_i}, m_l, \frac{\bar{\gamma}_l b}{2m_l}\right) \quad (\text{B.11})$$

onde

$$I(m_1, a_1, m_2, a_2) = \sqrt{\frac{\pi}{1+a_1+a_2}} F_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - m_1, 1 - m_2; \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{a_1}{1+a_1+a_2}, \frac{a_2}{1+a_1+a_2}\right) \quad (\text{B.12})$$

para qualquer $m_i \geq \frac{1}{2}$, $i \in \{1, 2\}$, e

$$\begin{aligned} F_2(v; a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(v)_i (a_1)_i}{(b_1)_i i!} c_1^i {}_2F_1(v+i, a_2; b_2; c_2) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(v)_i (a_2)_i}{(b_2)_i i!} c_2^i {}_2F_1(v+i, a_1; b_1; c_1) \\ & \quad [|c_1| + |c_2| < 1, b_i > 0] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Utilizando (B.4) e (B.13), [1] mostra que é possível simplificar (B.11) num polinômio finito, se ambos os m_i 's forem inteiros positivos ou $1/2$ de inteiros positivos ímpares. Observe que, de modo análogo a (B.3), (B.13) também se torna uma série finita se pelo menos um dentre v , a_1 e a_2 é zero ou inteiro negativo, visto que $(x)_i = 0$ para $i > -x$ se x é um inteiro não-positivo. Para o caso Rayleigh ($m_1 = m_2 = 1$), o resultado é bastante simples:

$$P_b = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1(\bar{\gamma}_1 + 2/b)} + \sqrt{\bar{\gamma}_2(\bar{\gamma}_2 + 2/b)}}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + 2/b} \right) \quad (\text{B.14})$$

Para a condição mais severa de desvanecimento ($m_1 = m_2 = 1/2$), obtém-se

$$P_b = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + 1/b}} \right) - \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\sqrt{\frac{\bar{\gamma}_2}{\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + 1/b}} \right) \quad (\text{B.15})$$

Caso $M=3$

Para três ramos de diversidade, com uso de (B.1) e (B.5), é possível mostrar que a probabilidade de erro da CGI com modulação binária coerente é dada por [1]

$$P_b = \frac{1}{2} + I_{3a}(1, 2, 3, b) - [I_{3b}(1, 2, 3, b) + I_{3b}(1, 3, 2, b) + I_{3b}(2, 3, 1, b)] \quad (\text{B.16})$$

onde

$$\begin{aligned} I_{3a}(x, y, z, b) &= \frac{2\Gamma(m_x + \frac{1}{2})\Gamma(m_y + \frac{1}{2})\Gamma(m_z + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(m_x)\Gamma(m_y)\Gamma(m_z)\zeta^{3/2}} \sqrt{\zeta_x \zeta_y \zeta_z} \\ & \quad \times F_A \left(\frac{3}{2}; 1 - m_x, 1 - m_y, 1 - m_z; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\zeta_x}{\zeta}, \frac{\zeta_y}{\zeta}, \frac{\zeta_z}{\zeta} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

e

$$I_{3b}(x, y, z, b) = \frac{\Gamma(m_z + \frac{1}{2})}{\Gamma(m_z)} \sqrt{\frac{\zeta_z}{\pi\zeta}} \times F_A \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - m_x, \frac{1}{2} - m_y, 1 - m_z; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\zeta_x}{\zeta}, \frac{\zeta_y}{\zeta}, \frac{\zeta_z}{\zeta} \right) \quad (\text{B.18})$$

para qualquer $m_i \geq 1/2$, $i \in \{1, 2, 3\}$, sendo $\zeta = 1 + \zeta_x + \zeta_y + \zeta_z$ e $\zeta_i = \bar{\gamma}_i b / (3m_i)$. Em [1, apêndice D], mostra-se que as funções hipergeométricas Appell de (B.17) e (B.18) podem ser substituídas por uma soma finita de polinômios e funções hipergeométricas gaussianas, respectivamente, para m_i 's inteiros. Entretanto, o número de termos da soma cresce exponencialmente com a elevação da severidade dos desvanecimentos. Para desvanecimento Rayleigh ($m_1 = m_2 = m_3 = 1$), obtém-se, após as devidas simplificações [24],

$$P_b = \frac{1}{2} - \mathcal{F} \left(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3, \frac{3}{b} \right) - \mathcal{F} \left(\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3, \bar{\gamma}_1, \frac{3}{b} \right) - \mathcal{F} \left(\bar{\gamma}_3, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \frac{3}{b} \right) + \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 \bar{\gamma}_3}{(\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + \bar{\gamma}_3 + 3/b)^3}} \quad (\text{B.19})$$

onde

$$\mathcal{F}(x, y, z, c) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x(x+y+c)(x+z+c)}{(x+y+z+c)^3}} {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{yz}{(x+y+c)(x+z+c)} \right) \quad (\text{B.20})$$

B.1.2 Detecção Não-Coerente

Os resultados apresentados a seguir para a probabilidade de erro de bit de modulações binárias não-coerentes resultam da aplicação de (3.13).

Caso $M=1$

Na ausência de diversidade, substituindo-se (3.1) e (3.17) em (3.13) com $M = 1$, é possível mostrar que a probabilidade de erro de bit para FSK e DPSK binários não-coerentes em ambiente Nakagami- m é dada por [1, 9]

$$P_b = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m + b\bar{\gamma}} \right)^m \quad (\text{B.21})$$

Caso $M=2$

Para dois ramos de diversidade, mostra-se que [1]

$$P_b = I_{2a}(1, 2, b) - I_{2b}(1, 2, b) + I_{2c}(1, 2, b) + I_{2c}(2, 1, b) \quad (\text{B.22})$$

onde

$$I_{2a}(x, y, b) = \frac{1}{2\sqrt{2b}} m_x^{m_x} m_y^{m_y} \frac{\left(\frac{2}{b}m_x + \bar{\gamma}_x\right)^{m_y - \frac{1}{2}} \left(\frac{2}{b}m_y + \bar{\gamma}_y\right)^{m_x - \frac{1}{2}}}{\left(\frac{2}{b}m_x m_y + \bar{\gamma}_x m_y + \bar{\gamma}_y m_x\right)^{m_x + m_y - \frac{1}{2}}} \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - m_x, \frac{1}{2} - m_y; \frac{1}{2}; \frac{\bar{\gamma}_x \bar{\gamma}_y}{\left(\frac{2}{b}m_x + \bar{\gamma}_x\right)\left(\frac{2}{b}m_y + \bar{\gamma}_y\right)}\right) \quad (\text{B.23})$$

$$I_{2b}(x, y, b) = \frac{\Gamma(m_x + \frac{1}{2})\Gamma(m_y + \frac{1}{2})}{2\Gamma(m_x)\Gamma(m_y)} \frac{\left(\frac{2}{b}m_x + \bar{\gamma}_x\right)^{m_y - 1} \left(\frac{2}{b}m_y + \bar{\gamma}_y\right)^{m_x - 1}}{\left(\frac{2}{b}m_x m_y + \bar{\gamma}_x m_y + \bar{\gamma}_y m_x\right)^{m_x + m_y - \frac{1}{2}}} \times m_x^{m_x} m_y^{m_y} \sqrt{\frac{2\bar{\gamma}_x \bar{\gamma}_y}{b}} {}_2F_1\left(1 - m_x, 1 - m_y; \frac{3}{2}; \frac{\bar{\gamma}_x \bar{\gamma}_y}{\left(\frac{2}{b}m_x + \bar{\gamma}_x\right)\left(\frac{2}{b}m_y + \bar{\gamma}_y\right)}\right) \quad (\text{B.24})$$

$$I_{2c}(x, y, b) = \frac{\Gamma(m_y + \frac{1}{2})}{16b\Upsilon^{3/2}\Gamma(m_y)} \sqrt{\frac{\bar{\gamma}_y}{2\pi m_y}} \times F_A\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} - m_x, 1 - m_y, 1; \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{\bar{\gamma}_x}{8m_x\Upsilon}, \frac{\bar{\gamma}_y}{8m_y\Upsilon}, -\frac{1}{4b\Upsilon}\right) \quad (\text{B.25})$$

para qualquer $m_i \geq \frac{1}{2}$, $i \in \{1, 2\}$, e $\Upsilon = \bar{\gamma}_x/(8m_x) + \bar{\gamma}_y/(8m_y)$. Em [1], mostra-se que é possível simplificar (B.25) numa soma de finitos termos para m_i 's inteiros positivos ou 1/2 de inteiros positivos ímpares. Novamente, entretanto, o número de termos da soma cresce exponencialmente com a elevação da severidade dos desvanecimentos. Para o caso Rayleigh ($m_1 = m_2 = 1$), obtém-se, após devidas manipulações algébricas [24]

$$P_b = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{2}{b}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, 0\right) - \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \frac{2}{b}, 0\right) - \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\bar{\gamma}_2, \frac{2}{b}, \bar{\gamma}_1, 0\right) - \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{2\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2}{b(\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2 + 2/b)^3}} \quad (\text{B.26})$$

sendo $\mathcal{F}(x, y, z, c)$ definida em (B.20). Para a condição de desvanecimento mais severa ($m_1 = m_2 = 1/2$), resulta que

$$I_{2c}(x, y, b) = \frac{1}{2\pi\sqrt{b\bar{\gamma}_x + b\bar{\gamma}_y + 1}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{\bar{\gamma}_y}{b(\bar{\gamma}_x + \bar{\gamma}_y)(\bar{\gamma}_x + 1/b)}} \right) \quad (\text{B.27})$$

B.2 Estatísticas de Segunda Ordem

Em [15] e [14], apresentam-se as estatísticas de segunda ordem na ausência de diversidade ($M = 1$) em ambientes Nakagami- m e Rice, respectivamente:

$$N(r) = \begin{cases} f_m \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(m)} (m\rho^2)^{m-\frac{1}{2}} \exp(-m\rho^2) & , \text{ Nakagami-}m \\ f_m \frac{\sqrt{2\pi(1+k)}}{\exp(k)} \rho \exp(-(1+k)\rho^2) I_0\left(2\sqrt{k(1+k)}\rho\right) & , \text{ Rice} \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

$$T(r) = \begin{cases} \frac{1}{f_m} \frac{\Gamma(m, m\rho^2)}{\sqrt{2\pi}(m\rho^2)^{m-\frac{1}{2}}} \exp(m\rho^2) & , \text{ Nakagami-}m \\ \frac{1}{f_m} \frac{1-Q(\sqrt{2k}, \sqrt{2(1+k)}\rho)}{\frac{\sqrt{2\pi(1+k)}}{\exp(k)} \rho \exp(-(1+k)\rho^2) I_0(2\sqrt{k(1+k)}\rho)} & , \text{ Rice} \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

para $\rho = r/\hat{r}$, ou seja, com $\hat{r}_b = \hat{r}$.

As fórmulas seguintes se referem à taxa de cruzamento de nível e à duração média de desvanecimento da combinação por ganho igual com dois ramos de diversidade, dedutíveis de (2.33) e (2.35) para $M = 2$, respectivamente.

Em ambiente Rayleigh iid, mostra-se que [10]

$$N(r) = f_m \sqrt{2\pi} e^{-\varrho^2} \left[\varrho e^{-\varrho^2} + (2\varrho^2 - 1) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\varrho) \right] \quad (\text{B.30})$$

$$T(r) = \frac{1}{f_m} \frac{1 - e^{-2\varrho^2} - \sqrt{\pi} \varrho e^{-\varrho^2} \operatorname{erf}(\varrho)}{\sqrt{2\pi} e^{-\varrho^2} \left[\varrho e^{-\varrho^2} + (2\varrho^2 - 1) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\varrho) \right]} \quad (\text{B.31})$$

onde $\varrho = r/\hat{r}_i$ e $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ é a função erro. Recentemente, [2, apêndice B] deduziu soluções fechadas para o caso Nakagami-m iid com $m_1 = m_2 = m$, obtendo:

$$N(r) = f_m \frac{\sqrt{2\pi} B(2m, \frac{1}{2})}{\Gamma^2(m) 2^{2m-2}} (m\varrho^2)^{2m-\frac{1}{2}} e^{-2m\varrho^2} {}_1F_1\left(2m; 2m + \frac{1}{2}; m\varrho^2\right) \quad (\text{B.32})$$

$$T(r) = \frac{1}{f_m} \frac{e^{2m\varrho^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2m+n)}{\Gamma(2m+n+\frac{1}{2})} \frac{1}{2^n n!} \Gamma(2m+n, 2m\varrho^2)}{2B(2m, \frac{1}{2}) (2m\varrho^2)^{2m-\frac{1}{2}} {}_1F_1(2m; 2m + \frac{1}{2}; m\varrho^2)} \quad (\text{B.33})$$

onde $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ é a função beta. Ainda em [2], apresenta-se a taxa de

cruzamento de nível para CGI em ambiente Rayleigh com desbalanceamento de potência entre os ramos:

$$N(r) = f_m \frac{\sqrt{\pi} e^{-2\varrho_1^2}}{(1+\kappa)^{3/2}} \left[2\varrho_1 \left(1 + \kappa e^{2(1-\frac{1}{\kappa})\varrho_1^2} \right) - \sqrt{\frac{\pi\kappa}{2(1+\kappa)}} (1 + \kappa - 4\varrho_1^2) \right. \\ \left. \times e^{\frac{2\kappa}{1+\kappa}\varrho_1^2} \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{2}{\kappa(1+\kappa)}} \varrho_1 \right) + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{2\kappa}{1+\kappa}} \varrho_1 \right) \right) \right] \quad (\text{B.34})$$

onde $\varrho_1 = r/\hat{r}_1$ e $\kappa = (\hat{r}_2/\hat{r}_1)^2$. A partir de (2.16), é possível mostrar que, neste mesmo cenário [25],

$$P(r) = 1 - \frac{e^{-2\varrho_1^2}}{1+\kappa} \left[1 + \kappa e^{2(1-\frac{1}{\kappa})\varrho_1^2} - \sqrt{\frac{2\pi\kappa}{1+\kappa}} \varrho_1 e^{\frac{2\kappa}{1+\kappa}\varrho_1^2} \right. \\ \left. \times \left(\operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{2}{\kappa(1+\kappa)}} \varrho_1 \right) + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{2\kappa}{1+\kappa}} \varrho_1 \right) \right) \right] \quad (\text{B.35})$$

Substituindo-se (B.34) e (B.35) em (2.34), tem-se diretamente a duração média de desvanecimento para o caso Rayleigh desbalanceado.

Apêndice C

A Função NIntegrate

A avaliação das integrações unidimensionais (análise freqüencial) e multidimensionais (análise geométrica) formuladas neste trabalho requer rotinas numéricas, uma vez que não há soluções fechadas. Na obtenção dos resultados do capítulo 4, empregou-se a função `NIntegrate` do software `Mathematica`. Este apêndice provê uma breve descrição de tal função.

- `NIntegrate[f, {x, xmin, xmax}]` fornece uma aproximação numérica para $\int_{xmin}^{xmax} f dx$.
- Integrais multidimensionais como $\int_{xmin}^{xmax} \int_{ymin}^{ymax} \cdots \int_{zmin}^{zmax} f dz \cdots dy dx$ podem ser implementadas com `NIntegrate[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, \dots, {z, zmin, zmax}]`.
- `NIntegrate` investiga a ocorrência de singularidades nos limites de integração. Adicionalmente, é possível investigar singularidades em pontos intermediários `xi` com `NIntegrate[f, {x, xmin, x1, x2, \dots, xmax}]`.
- Há várias opções que controlam a operação de `NIntegrate`: `AccuracyGoal`, `Compiled`, `GaussPoints`, `MaxPoints`, `MaxRecursion`, `Method`, `MinRecursion`, `PrecisionGoal`, `SingularityDepth` e `WorkingPrecision`. Em estado padrão, `NIntegrate` utiliza algoritmos adaptativos para subdividir a região de integração recursivamente, até que o erro estimado a partir das amostras obtidas implique num resultado final com acurácia (`AccuracyGoal`) ou precisão (`PrecisionGoal`) desejadas. A precisão usada nos cálculos internos é fornecida por `WorkingPrecision`. `MinRecursion` e `MaxRecursion` especificam os números mínimo e máximo de subdivisões recursivas do intervalo de integração, respectivamente. Aumentado-se os valores de `MinRecursion` ou de `MaxRecursion`, retarda-se o processamento de `NIntegrate`. No entanto, tal aumento é muitas vezes decisivo no êxito do cálculo, ao garantir uma melhor amostragem do integrando. `SingularityDepth` estabelece o número de subdivisões recursivas antes de uma mudança de variável para contornar problemas de singularidade nos limites de integração.

`Compiled` determina se o integrando deve ser compilado em pseudo-código de baixo nível para poupar tempo de processamento; a contrapartida é que pseudo-códigos permitem apenas operações numéricas com precisão de máquina. `GaussPoints` especifica o número inicial de amostras para integrações unidimensionais. `MaxPoints` define o número máximo de amostras do integrando para os métodos randômicos Monte Carlo e quasi Monte Carlo.

- Em se tratando de integrandos suficientemente mal-comportados, `NIntegrate` pode fornecer resultados inexatos. Um modo de testar os resultados é avaliar a sua sensibilidade a mudanças nas opções de controle. Por outro lado, há casos em que um devido conjunto de opções de controle é indispensável para o sucesso dos cálculos. Observar as mensagens retornadas por `NIntegrate` é um guia fundamental na inserção de opções adequadas.

Apêndice D

Artigos Publicados

M. D. Yacoub, J. C. S. Santos Filho, and C. R. C. M. da Silva, “Simple Closed-Form Solutions for Level Crossing Rate and Average Fade Duration in Nakagami- m Equal Gain Combining”, *Electronics Letters*, 38(25):1734–1735, December 2002.

José Cândido S. Santos Filho and Michel D. Yacoub, “Second-Order Statistics for Equal Gain Combining with Arbitrary Channels”, 2003 International Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC 2003), Iguazu Falls, Brazil, September 2003.

José Cândido S. Santos Filho e Michel D. Yacoub, “Relação Sinal-Ruído Média da Combinação por Ganho Igual de Canais Arbitrários”, XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT’03), Rio de Janeiro, outubro de 2003.

José Cândido S. Santos Filho e Michel D. Yacoub, “Estatísticas de Segunda Ordem da Combinação por Ganho Igual de Canais Arbitrários”, XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT’03), Rio de Janeiro, outubro de 2003.